DÉRIVABILITÉ.

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux ;
- f désigne une application de I dans $\mathbb{R}$, sauf mention du contraire.

I Rappels

I.1 Taux d'accroissement et dérivée

Définition 1 .

Soit $a \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en a l'application $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$.

Remarque 1

Pour a et x (distincts) dans I on a $\tau_x(a) = \tau_a(x)$.

Définition 2 .

1. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$ existe et est finie.
   Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en a.
2. On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
   Auquel cas l'application $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & I \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array} \right.$ s'appelle la dérivée de f.
3. On dit que f est continûment dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable sur I de dérivée continue.

Notation 1

1. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

On a évidemment $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. **Remarque 2**

Il existe des fonctions $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ mais pas $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Définition 3 . Soit $a \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en a lorsque τ_a a une limite à droite finie en a.
2. On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque τ_a a une limite à gauche finie en a.

I.2 $DL_1(a)$ et applications

Théorème 1 .

Soit $a \in I$.

1. f est dérivable en a si et seulement si f a un $DL_1(a)$;
2. lorsque c'est le cas, ce $DL_1(a)$ est $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

Théorème 2 : (rappel).

Si f est dérivable, alors f est continue.

Théorème 3 : TDFC.

Soient $\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}^1(I, J) \\ v \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}). \end{array} \right.$ Alors on a $v \circ u \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Théorème 4 .

Soient $f, g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. Alors on a :

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;
2. $fg \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$;
3. si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Corollaire 1 .

1. $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$;
2. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$;
3. $\partial : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$ est linéaire.

Théorème 5 : TDFR.

Soit $f : I \to J$ (I un intervalle). Si $\begin{cases} f \in (\mathrm{Bij} \cap \mathcal{D})(I,J) \\ f' \text{ ne s'annule pas} \end{cases}$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

II Théorèmes de moyenne et applications

II.1 Point critique

Définition 4 .

On suppose $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$. On appelle <u>point critique de f</u> un réel $a \in I$ pour lequel on a $f'(a) = 0$.

Théorème 6 : Lemme de Fermat sur les points critiques.

On suppose $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$.

Si f atteint un extremum local en a, alors a est soit un point critique de f soit une extrémité de I.

II.2 Théorème de Rolle

Théorème 7 : Rolle.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ pour lequel on a $f'(c) = 0$.

II.3 Accroissements finis

Théorème 8 : Égalité des accroissements finis.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors il existe $c \in]a,b[$ pour lequel on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire 2 : Inégalité des accroissements finis.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors :

1. $\inf\limits_{]a,b[} f' \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \sup\limits_{]a,b[} f'$;
2. $\left| \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leqslant \sup\limits_{]a,b[} |f'|$.

Théorème 9 : Reformulation de l'IAF.

On suppose que I est un intervalle et qu'on a $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$. Alors :

1. pour $k \geqslant 0$, on a $f \in k\text{–}\mathcal{L} \Leftrightarrow |f'| \leqslant k$;
2. pour $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f'|$ bornée.

II.4 Application aux études globales

Théorème 10 : sur le signe de la dérivée.

On suppose que I est un intervalle et qu'on a $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$.

1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f' \geqslant 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est croissante sur } I\,; \\ \text{si } f' \leqslant 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est décroissante sur } I. \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f' > 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est strictement croissante sur } I\,; \\ \text{si } f' < 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est strictement décroissante sur } I. \end{array} \right.$
3. Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.

II.5 $\mathcal{D}^1$ vs $\mathcal{C}^1$

Remarque 3

Ce théorème implique que les seules fonctions $\mathcal{C}_{pm}$ qui ont des primitives sont les fonctions continues, pourquoi ?

Théorème 11 : sur la limite de la dérivée.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose de plus que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
2. En particulier, si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Théorème 12 : théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux réels ℓ_0 et ℓ_1 tels que $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_0 \\ f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1. \end{cases}$

Alors f est prolongeable par continuité sur I et son prolongement est $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

En notant $f_\sim$ ce prolongement, on a $\begin{cases} f_\sim(a) = \ell_0 \\ f'_\sim(a) = \ell_1. \end{cases}$

II.6 Convexité des fonctions dérivables

Définition 5 .

La fonction f est dite <u>convexe</u> lorsqu'on a $\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ g\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)g(x) + tgf(y)$.

Remarque 4

On définit de même une fonction <u>concave</u> $g : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ g\big((1-t)x + ty\big) \geqslant (1-t)g(x) + tgf(y)$. Autrement dit, une fonction concave est l'opposée d'une fonction convexe, son graphe est **au dessus** de ses sécantes, son **hypographe** (l'ensemble des points du plan "sous" la courbe) est convexe, ses taux d'accroissements sont décroissants. L'étude des fonctions concaves est la même que celle des fonctions convexes, il suffit de renverser les inégalités. **Remarque 5**

Une fonction convexe n'a aucune raison d'être dérivable, par exemple $x \mapsto |x|$ est convexe.

Proposition 1 .

Supposons f dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

En particulier, si f est deux fois dérivable, alors elle est convexe si et seulement si f'' est positive.

Définition 6 .

Soit $a \in I$. On dit que <u>f présente un point d'inflexion en a</u> lorsque f change de concavité en a.