Dérivabilité.

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux ;
- f désigne une application de I dans $\mathbb{R}$, sauf mention du contraire.

I Rappels

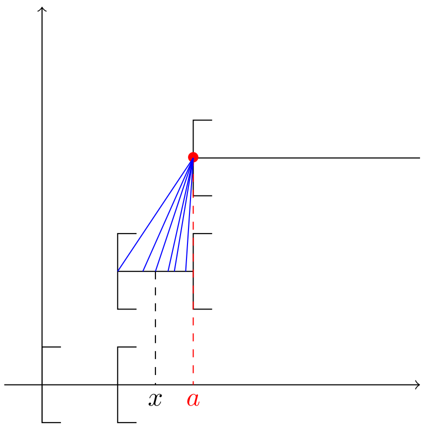
I.1 Taux d'accroissement et dérivée

Définition 1 .

Soit $a \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en a l'application $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$.

Remarque : l'application τ_a dépend de a, mais aussi de f. On devrait en toute rigueur écrire $\tau_{f,a}$ si le contexte ne permettait pas de déterminer f sans ambiguïté.

Interprétation géométrique :



Remarque 1

Pour a et x (distincts) dans I on a $\tau_x(a) = \tau_a(x)$.

Définition 2 .

1. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$ existe et est finie.
   Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en a.
2. On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
   Auquel cas l'application $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & I \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array} \right.$ s'appelle la dérivée de f.
3. On dit que f est continûment dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable sur I de dérivée continue.

Notation 1

1. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

On a évidemment $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

Remarque 2

Il existe des fonctions $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ mais pas $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Exemple 1 (Cet exemple fait partie de l'exercice CCINP $n°4.3$).

$$f := \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \sin \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

— Sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable par théorèmes généraux

— Montrons qu'elle est dérivable en 0 : Pour $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x}) \quad \text{est borné.}$$

Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to 0$ par TdG Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ Ainsi f dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que f' est discontinue en 0.

— $2x \sin(\frac{1}{x}) \to_0 0$ par TdG

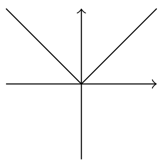
— Mais $-\cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$

Donc $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite pour $x \to 0$. Donc f' n'a pas de limite en 0
Donc $f' \notin \mathcal{C}$. d'où $f \notin \mathcal{C}^1$

Définition 3 . Soit $a \in I$.

1. On dit que f est dérivable à droite en a lorsque τ_a a une limite à droite finie en a.
2. On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque τ_a a une limite à gauche finie en a.

Exemple 2 $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $\begin{cases} f'_d(0) & = 1 \\ f'_g(0) & = -1 \end{cases}$



$\lfloor \mathrm{id} \rfloor$ et $a \in \mathbb{Z}$.
g est bien dérivable à droite en a et $g'(a) = 0$ mais g n'est pas dérivable à gauche en a car le taux d'accroissement à gauche tend vers $+\infty$

I.2 $DL_1(a)$ et applications

Théorème 1 .

Soit $a \in I$.

1. f est dérivable en a si et seulement si f a un $DL_1(a)$;
2. lorsque c'est le cas, ce $DL_1(a)$ est $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

Démonstration. • Supposons f dérivable en a.
ie $\frac{f - f(a)}{\mathrm{id} - a} \to_a f'(a)$
ie $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to_0 f'(a)$
Notons $\epsilon := h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$. On a $\epsilon \to_0 0$

$$\begin{aligned} & h\epsilon(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) \\ \Leftrightarrow\ & f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h) \\ & \qquad\quad = f(a) + hf'(a) + o(h) \qquad \text{car } \epsilon \to_0 0 \end{aligned}$$

.

• Supposons que f a un $DL_1(a)$ de la forme $f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + o(h)$.

Montrons $\begin{cases} f \text{ est dérivable} \\ \alpha_0, \alpha_1 = f(a), f'(a) \end{cases}$.

$$\lim_{h\to 0} \alpha_0 + \alpha_1 h + o(h) = \alpha_0$$
$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \alpha_0$$

.

donc en particulier, $\boxed{\alpha_0 = f(a)}$

donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-\alpha_0}{h} = \frac{\alpha_0+\alpha_1 h+o(h)-\alpha_0}{h} = \alpha_1 + o(1) \to \alpha_1 \in \mathbb{R}$

donc <u>f est dérivable en a</u> et $\boxed{f'(a) = \alpha_1}$

□

En corollaire, on peut démontrer toutes les propriétés connues de la dérivation.

Théorème 2 : (rappel).

Si f est dérivable, alors f est continue.

Démonstration. Soit $a \in I$.

Supposons f dérivable en a. D'après le <u>théorème 1</u> : $f(a+h) = f(a) + \underbrace{hf'(a) + o(h)}_{\to 0}$ donc $f(a+h) \to_0 f(a)$ ie $f \to_a f(a)$ donc f continue en a. □

/!\ Réciproque fausse : mort-subite grâce à l'un d'entre vous (je ne balance pas qui c'est).

<u>Exo bonus : trouver une fonction continue dérivable ni à gauche ni à droite</u>

Théorème 3 : TDFC.

Soient $\begin{cases} u \in \mathcal{D}^1(I,J) \\ v \in \mathcal{D}^1(J,\mathbb{R}). \end{cases}$ Alors on a $v \circ u \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $(v\circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Démonstration. Soit $a \in I$. u est dérivable en a donc

$$u(a+h) = u(a) + hu'(a) + o(h)$$

.

v est dérivable en $u(a)$ donc

$$v(u(a)+H) = v(u(a)) + Hv'(u(a)) + o(H).$$

Pour montrer que $v \circ u$ est dérivable en a, montrons que $v \circ u$ a un $DL_1(a)$

$$\begin{aligned}(v\circ u)(a+h) &= v(u(a+h)) \\ &= v(u(a) + \underbrace{hu'(a) + o(h)}_{H\to 0}) \\ &= v(u(a)+H) \\ &= v(u(a)) + Hv'(u(a)) + o(H) \\ &= v(u(a)) + \underbrace{u'(a)v'(u(a))}_{(v\circ u)'(a)} h + o(h)\end{aligned}$$

.

Donc $v \circ u$ dérivable et

$$(v\circ u)'(a) = u'(a)(v'\circ u)(a).$$

□

Théorème 4 .

Soient $f, g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. Alors on a :

1. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;
2. $fg \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$;
3. si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(a+h) &= \lambda(f(a) + hf'(a) + o(h)) + \mu(g(a) + hg'(a) + o(h))\\ &= \lambda f(a) + \lambda h f'(a) + \mu g(a) + \mu h g'(a) + o(h)\\ &= \lambda f(a) + \mu g(a) + h(\lambda f'(a) + \mu g'(a)) + o(h)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(fg)'(a+h) &= f(a+h)g(a+h)\\ &= (f(a) + hf'(a) + o(h))(g(a) + hg'(a) + o(h))\\ &= f(a)g(a) + h(f(a)g'(a) + g'(a)f(a)) + o(h)\end{aligned}$$

3. On a
   $\boxed{\text{Meth 1}}$ *Version smart*
   $$\left(\frac{f}{h}\right)' = \left(f\frac{1}{h}\right)' = \frac{f'}{h} + \left(-\frac{f}{h^2}\right) = \frac{f'h - fh'}{h^2}.$$
   $\boxed{\text{Meth 2}}$ *Avec des DLs*
   Soit $a \in I$. Supposons $\forall x \in I, g(x) \neq 0$. Montrons que $\frac{f}{g}$ a un $DL_1(a)$
   $$\begin{aligned}\frac{f}{g}(a+h) &= \frac{f(a+h)}{g(a+h)}\\ &= \frac{f(a) + hf'(a) + o(h)}{f(a) + hf'(a) + o(h)}\\ &= (f(a) + hf'(a) + o(h))\frac{1}{g(a)}\left(\frac{1}{1 + \frac{hg'(a)+o(h)}{g(a)}}\right)\\ &= (f(a) + hf'(a) + o(h))\frac{1}{g(a)}\left(1 - \frac{hg'(a) + o(h)}{g(a)} + o(h)\right)\\ &= (f(a) + hf'(a) + o(h))\frac{1}{g(a)}\left(\frac{1}{g(a)} - \frac{hg'(a)}{g(a)^2} + o(h)\right)\\ &= \frac{f(a)}{g(a)} - \frac{hf(a)g'(a)}{g(a)^2} + \frac{hf'(a)}{g(a)} + o(h)\\ &= \frac{f}{g}(a) - h\left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(a) + o(h)\end{aligned}$$
   .

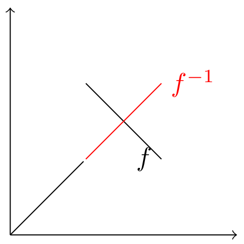
□

Corollaire 1 .

1. $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$;
2. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$;
3. $\partial : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})\\ f & \mapsto & f'\end{array}\right.$ est linéaire.

Théorème 5 : TDFR.
Soit $f : I \to J$ (I un intervalle). Si $\begin{cases} f \in (\mathbb{B} \cap \mathcal{D})(I, J) \\ f' \text{ ne s'annule pas} \end{cases}$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

/!\ L'hypothèse « I intervalle » est indispensable. Contre-exemple habituel :



$$f := \begin{cases} [0,2] \setminus \{1\} & \to [0,2[\\ x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si} x \in [0,1[\\ 3 - x & \text{si} x \in]1,2] \end{cases} \end{cases}.$$

$f^{-1} : \begin{cases} [0,2[\to [0,2] \setminus \{1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si} x \in [0,1[\\ 3 - x & \text{si} x \in [1,2[\end{cases} \end{cases}$ n'est pas continue

f est dérivalbe sur $[0,2] \setminus \{1\}$ et f' ne s'annule pas $f' : \begin{cases} [0,2] \setminus \{1\} \to [0,2[\\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} x \in [0,1[\\ -1 & \text{si} x \in]1,2] \end{cases} \end{cases}$

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I$. Notons $b = f(a)$. Pour $y \in J \setminus \{b\}$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$
.

En posant $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ ie

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

$$\underbrace{f}_{=f(x)} \to \underbrace{b}_{=f(a)} \Leftrightarrow \underbrace{x}_{f^{-1}(y)} \to \underbrace{a}_{=f^{-1}(b)}.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ par continuité de f
$\boxed{\Longleftarrow}$ par continuité de f^{-1} car la réciproque d'une fonction continue sur un intervalle est continue

$$\begin{aligned} \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \\ &= \frac{1}{f'(a)} \\ &= \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)} \end{aligned}$$
.

□

Application 1 On a utilisé ce théorème pour calculer les dérivées de arcsin, arccos, arctan.

II Théorèmes de moyenne et applications

II.1 Point critique

Définition 4 .

On suppose $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. On appelle point critique de f un réel $a \in I$ pour lequel on a $f'(a) = 0$.

Théorème 6 : Lemme de Fermat sur les points critiques.

On suppose $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.
Si f atteint un extremum local en a, alors a est soit un point critique de f soit une extrémité de I.

Démonstration. Supposons f atteint un extremum local en a. Montrons que si a n'est pas une extremité de I, alors c'est un point critique de f.
Supposons a n'est pas une extremité ie il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a+\epsilon, a-\epsilon[\subset I$.
Quitte à changer f en $-f$, f atteint un maximum local en a.
Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$.
Pour $\gamma := \min\{\epsilon, \eta\}$ on a $]a-\gamma, a+\gamma[\subset I$ et $\forall x \in]a-\gamma, a+\gamma[, f(x) \leq f(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{\geq 0}} \leq 0 \qquad \text{car les inégalités larges passent à la limite}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{\leq 0}} \geq 0 \qquad \text{car les inégalités larges passent à la limite}$$

Donc $f'(a) = 0$

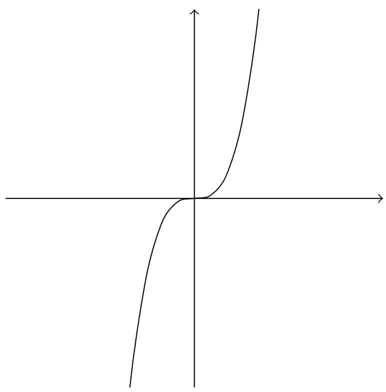
.

drawing 2

□

/!\ Si a est un point critique de f, $f(a)$ n'est pas nécessairement un extremum local de f.

Exemple 3 id^3 a un point critique en 0 mais pas un extremum local



II.2 Théorème de Rolle

Théorème 7 : Rolle.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[, \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ pour lequel on a $f'(c) = 0$.

Remarque : il y a bien **trois** hypothèses (lesquelles ?).

— $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
— $f \in \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$
— $f(a) = f(b)$

DÉMONSTRATION. On commence par un dessin.

`drawing 4`

Traitons deux cas.
$\boxed{f \text{ constante}}$ $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$
$\boxed{f \text{ non constante}}$
f est continue sur un segment, donc bornée et atteint ses bornes.

$$\begin{aligned} M &= \sup_{[a,b]} f = f(\alpha) \qquad \text{pour un certain } \alpha \in [a,b] \\ m &= \inf_{[a,b]} f = f(\beta) \qquad \text{pour un certain } \beta \in [a,b] \end{aligned}$$
.

$m < M$ car f n'est pas constante donc α ou β ne peut pas être une extremité de $[a,b]$. D'après Fermat, c'est donc un point critique de f.

□

Application 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Si P est scindé à racines simples alors P' l'est aussi.

$$P \text{ scindé} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ est de la forme } P = a(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) \qquad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts.}$$

`drawing 5`

À renommage près, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$
$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \cdots = P(\lambda_n) = 0 \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}, P \in \mathcal{C}([\lambda_i,\lambda_{i+1}] \cap \mathcal{D}(]\lambda_i,\lambda_{i+1}[,\mathbb{R}) \end{cases}$
Donc d'après Rolle, il existe $c_i \in]\lambda_i,\lambda_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.
On a
$$\lambda_1 < c_1 < \lambda_2 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < \lambda_n.$$
donc $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$ donc les c_i sont différents
P' se factoriser par $\underbrace{(X-c_1)(X-c_2)\cdots(X-c_{n-1})}_{\text{degré } n-1}$
Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\underbrace{P'}_{\text{degré } n-1} = \underbrace{b}_{\text{constante}} (X-c_1)(X-c_2)\cdots(X-C_{n-1})$

II.3 Accroissements finis

Théorème 8 : Égalité des accroissements finis.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors il existe $c \in]a,b[$ pour lequel on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique :

`drawing 6`

DÉMONSTRATION. Notons $g : [a,b] \to \mathbb{R} = x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x = f - \tau_b(a) \cdot \mathrm{id}$

— $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ par théorèmes généraux
— $g \in \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux
— $\begin{cases} g(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a)\cancel{-af(a)}-af(b)\cancel{+af(a)}}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{bf(a)-af(b)-bf(b)+bf(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \end{cases}$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$ ie $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ie $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Interprétation cinématique : Sous des hypothèses raisonnables, la vitesse moyenne est toujours obtenue comme vitesse instantanée en un instant (ou plusieurs) remarquables.

Corollaire 2 : Inégalité des accroissements finis.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors :

1. $\inf\limits_{]a,b[} f' \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \sup\limits_{]a,b[} f'$;
2. $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant \sup\limits_{]a,b[} |f'|$.

Il est possible que les inf et sup considérés soient infinis. Auquel cas l'inégalité concernée ne donne pas d'information.

Démonstration. Exercice. Et pour info : c'est inquiétant si c'est insurmontable. Inquiète-toi. Et surtout envoie-moi un mail.
Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}))$.
D'après l'EAF, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\tau_b(a) = f'(c)$
Or $f'(c) \in f'^{\rightarrow}(]a,b[) = E$.
Donc

$$\begin{aligned} &\inf E \leq f'(c) \leq \sup E \\ \Leftrightarrow\ &\inf_{]a,b[} f' \leq \tau_b(a) \leq \sup_{]a,b[} f' \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} |\tau_b(a)| &= |f'(c)| \\ &= |f'|(c) \end{aligned}$$

.
Enfin,

$$\begin{aligned} &|f'|(c) \in f'^{\rightarrow}(]a,b[) \\ \implies &|f'(c)| \leq \sup |f'|^{\rightarrow}(]a,b[) \\ \Leftrightarrow\ &|\tau_b(a)| \leq \sup_{]a,b[} |f'| \end{aligned}$$

□

Application 3 Retrouvons qu'on a $\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$.
Soit $n \geq 1$ et $k \in [1,n]$. Appliquons l'IAF[1] à l'intervalle $[k,k+1]$.

— ln est continue et dérivable sur $[k,k+1]$ (donc elle est dérivable sur $]k,k+1[$)

Par IAF,

$$\begin{aligned} \inf_{]k,k+1[} \ln' \leq \frac{\ln(k+1)-\ln k}{k+1-k} &\leq \sup_{]k,k+1[} \ln' \\ \inf_{]k,k+1[} \frac{1}{\mathrm{id}} \leq \frac{\ln(k+1)-\ln k}{k+1-k} &\leq \sup_{]k,k+1[} \frac{1}{\mathrm{id}} \\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k &\leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On somme les inégalités de gauche pour $k \in [\![1,n[\![$ on obtient $H_n - 1 \leq \ln n \cancel{- \ln 1}$
On somme les inégalités de droite pour $k \in [\![1,n]\!]$ on obtient $\ln(n+1) \cancel{- \ln 1} \leq H_n$
Finalement, $H_n \leq \ln n + 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$

Théorème 9 : Reformulation de l'IAF.

On suppose que I est un intervalle et qu'on a $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$. Alors :

1. pour $k \geqslant 0$, on a $f \in k-\mathcal{L} \Leftrightarrow |f'| \leqslant k$;
2. pour $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f'|$ bornée.

1. Inégalité des accroissements finis

Démonstration. Il est clair (est-ce clair ?) qu'il suffit de montrer le premier point.

$\boxed{\implies}$ Supposons $f \in k\text{–}\mathcal{L}$ ie $\forall x \neq a \in I, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq K$.
Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}|f'(a)| &= \left|\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \\ &= \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \\ &\leq k \qquad \text{car les inégalités larges passent à la limite.}\end{aligned}$$

$\boxed{\impliedby}$ Supposons $|f'| \leqslant k$. Soient $x \neq a \in I$. À renommage près, $a < x$. $\begin{cases} f \in \mathcal{C}([a,x],\mathbb{R}) & \text{car } f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{D}(]a,x[,\mathbb{R}) & \text{car } f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})\end{cases}$ car I est un intervalle.
Donc d'après l'IAF, $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq \sup_{]a,x[}|f'| \leq \sup_I |f'| \leq k$ □

/!\ Attention, il existe des fonctions lipschitziennes mais pas dérivables, comme $x \mapsto |x|$.

Application 4

1. On retrouve que cos et sin sont $1\text{–}\mathcal{L}$ (et pas mieux), puisqu'on a :
   $\begin{cases} |\cos'| = |-\sin| = |\sin| \leq 1 \\ |\sin'| = |\sin| \leq 1 \end{cases}$ Donc d'après l'IAF
2. On obtient arctan est $1\text{–}\mathcal{L}$ puisqu'on a :
   $\left\{ |\arctan'| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{id}^2}\right| \leq 1\right.$ Donc d'après l'IAF

II.4 Application aux études globales

Théorème 10 : sur le signe de la dérivée.

On suppose que I est un intervalle et qu'on a $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$.

1. $\begin{cases} \text{Si } f' \geqslant 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est croissante sur } I\,; \\ \text{si } f' \leqslant 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est décroissante sur } I. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \text{Si } f' > 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est strictement croissante sur } I\,; \\ \text{si } f' < 0 \text{ sur } I \text{ alors } f \text{ est strictement décroissante sur } I. \end{cases}$
3. Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.

Et évidemment si I n'est pas un intervalle, on connaît moult contre-exemples.

Démonstration. Enfin ! Non mais genre, n'est-il pas un peu temps de comprendre pourquoi c'est vrai ?
On montre seulement 1., les deux autres points s'obtiennent exactement de la même façon.
Supposons $f' \geq 0$. Montrons $\forall a \leq b \in I,\ f(a) \leq f(b)$ Soient $a \leq b \in I$.
Excluons le cas trivial $a = b$. On ainsi $a < b$.
$\begin{cases} f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}) \end{cases}$, donc d'après l'EAF [2], il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \\ \implies f(b) &\geq f(b). \end{aligned}$$

□

/!\ La réciproque de 2. n'est pas vraie. Exemple : $x \mapsto x^3$ Pour que $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ soit strictement croissante (I intervalle) il suffit que $f' \geq 0$ et f' s'annule uniquement en des <u>points isolés</u>

2. Égalité des accroissements finis

II.5 $\mathcal{D}^1$ vs $\mathcal{C}^1$

Application 5 : Le théorème de Darboux.

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors f' est PVI.

Rappelons ce que cela veut dire : « f' est PVI » signifie que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaire, *i. e.* que l'image directe par f' d'un intervalle est toujours un intervalle, ou encore que, pour tous $a < b \in I$, en notant $\alpha = \min(f'(a), f'(b))$ et $\beta = \max(f'(a), f'(b))$, on a : $\forall \gamma \in [\alpha, \beta],\ \exists c \in [a, b],\ f'(c) = \gamma$.

Le théorème de Darboux exprime donc qu'une dérivée, même discontinue, ne peut pas présenter de "sauts". Les seules discontinuités possibles doivent être dues à des "oscillations".

Démonstration. Soient $a < b \in I$. Notons $\begin{cases} \alpha & := \min\{f'(a), f'(b)\} \\ \beta & := \max\{f'(a), f'(b)\} \end{cases}$. Montrons $\forall \gamma \in [\alpha, \beta], \exists c \in [a, b], f'(c) = \gamma$.

Notons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \gamma x \end{array} \right.$

Pb $\begin{cases} g(a) & = f(a) - \gamma a \\ g(b) & = f(b) - \gamma b \end{cases}$.

/!\ Il n'y a aucune raison d'avoir $g(a) = g(b)$.

Montrons qu'il existe $u < v \in [a, b]$ tels que $g(u) = g(v)$. Procédons par l'absurde. S'il n'existe pas de tel couple (u, v) cela signifie que g est injective. Or g est dérivable donc continue sur $[a, b]$. Donc g est strictement monotone !

Si g strictement croissante alors $g' \geq 0$. $\begin{cases} f'(a) - \gamma \geq 0 \\ f'(b) - \gamma \geq 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha \geq \gamma \\ \beta \geq \gamma \end{cases}$.

Si g strictement décroissante (idem).

Donc u et v existent et

$$\begin{cases} g \in \mathcal{C}([u, v], \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{D}(]u, v[, \mathbb{R}) \\ g(u) = g(v) \end{cases}$$

Donc d'après Rolle il existe $c \in]u, v[\subset [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$ ie $f'(c) = \gamma$ □

Remarque 3

Ce théorème implique que les seules fonctions $\mathcal{C}_{pm}$ qui ont des primitives sont les fonctions continues, pourquoi ?

Théorème 11 : sur la limite de la dérivée.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose de plus que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
2. En particulier, si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Bien sûr, la dérivée peut ne pas avoir de limite, cf l'exemple 1.

La démonstration de ce théorème complète d'ailleurs la résolution de l'exercice CCINP $n°4$.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Alors $f \in \mathcal{C}([a, x], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a, x[, \mathbb{R})$.
D'après l'EAF, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \tau_a(x)$
$a < c_x < x$, donc par TdG $c_x \to_{x \to a} a$.
Or $f' \to_a l$ donc $f'(c_x) \to_a l$ ie $\tau_a \to_a l$ □

Exemple 4 Considérons la fonction arcsin
$\arcsin \in \mathcal{D}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ et $\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}}$ d'après le TDRC.

Or $\arcsin' \to_{\pm 1} +\infty$ donc $\frac{\arcsin - \arcsin(\pm 1)}{\mathrm{id} - \pm 1} \to_{\pm 1} +\infty$
d'après le TLD[3], en particulier, arcsin n'est pas dérivable en ± 1

3. Théorème du signe de la dérivée

Plus généralement Le même argument montre que si f dérivable et bijective mais $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$

En corollaire :

Théorème 12 : théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux réels ℓ_0 et ℓ_1 tels que $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_0 \\ f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1. \end{array} \right.$

Alors f est prolongeable par continuité sur I et son prolongement est $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

En notant $f_\sim$ ce prolongement, on a $\left\{ \begin{array}{l} f_\sim(a) = \ell_0 \\ f'_\sim(a) = \ell_1. \end{array} \right.$

Démonstration. C'est assez immédiat. Exercice. □

Application 6 Considérons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - 1}{x}. \end{array} \right.$

— $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1+o(x)}{x} = 1$

— $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\exp-1}{\text{id}}\right)' = \lim_{x\to 0} \frac{\exp\cdot\text{id} - (\exp-1)}{\text{id}^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}$

— $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

Donc f a un profolongement $\mathcal{C}^1$ à $\mathbb{R}$ en posant $f_\sim(0) = 1$. On a alors $f_\sim(0) = \frac{1}{2}$.

II.6 Convexité des fonctions dérivables

Ce n'est pas au programme mais c'est éclairant pour identifier l'allure des graphes des fonctions usuelles, alors on va en dire deux mots. Disons que c'est une (toute toute petite) introduction au cours de l'an prochain.
Dans toute la sous-section, I est un intervalle.

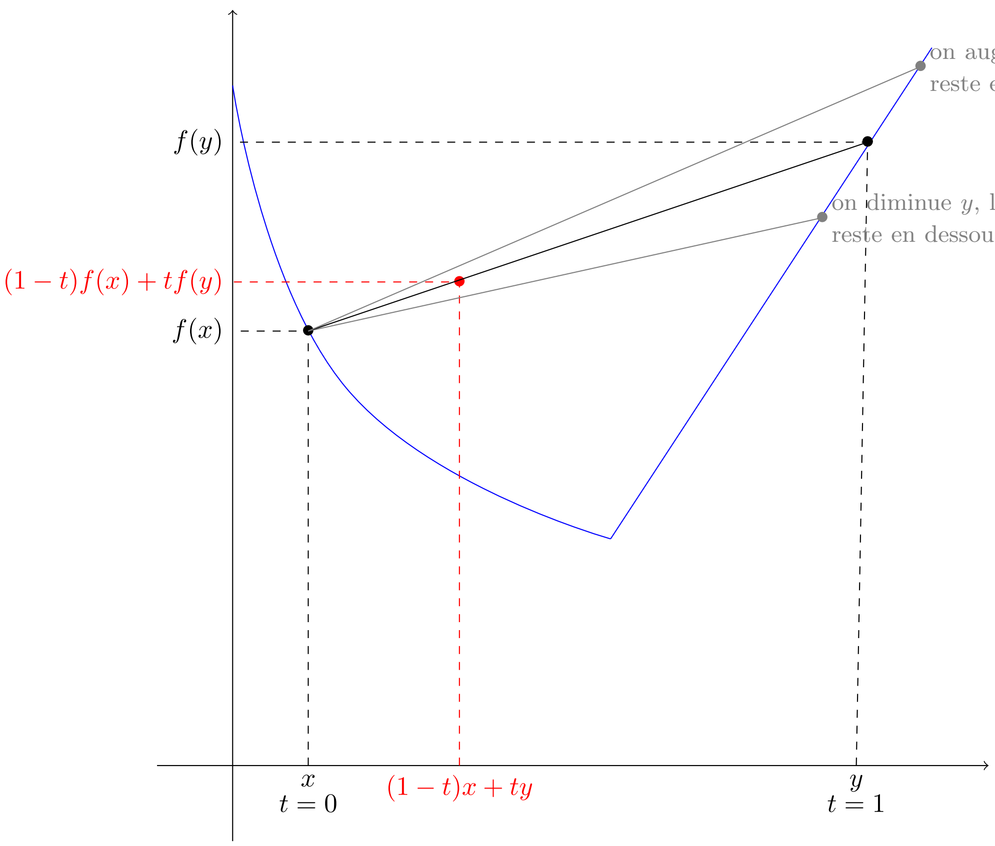
Définition 5 .

La fonction f est dite convexe lorsqu'on a $\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ g\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)g(x) + tgf(y)$.

Quelques interprétations géométriques : Ces reformulations ne sont pas toutes immédiates, mais on ne s'attardera pas sur leurs démonstrations puisqu'on déborde ici du programme.

- La fonction f est convexe si et seulement si son **épigraphe** est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. L'épigraphe de f est l'ensemble des points du plan "au dessus de la courbe de f", c'est-à-dire $\mathcal{E}pi_f = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant f(x) \right\}$.
- La fonction f est convexe si et seulement si sa courbe est **en dessous de ses sécantes** entre les deux points considérés (et au dessus au delà de ces points).
- La fonction f est convexe si et seulement si tous ses taux d'accroissements τ_a (pour $a \in I$) sont croissants.

Un dessin pour illustrer tout cela :



Exemple 5 La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, parce que "ça se voit". Plus sérieusement, le calcul suivant le montre.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\big((1-t)x+ty\big)^2 - \big((1-t)x^2+ty^2\big) &= (1-t)^2x^2 + 2t(1-t)xy + t^2y^2 - (1-t)x^2 - ty^2 \\
&= \big((1-t)^2-(1-t)\big)x^2 + 2t(1-t)xy + \big(t^2-t\big)y^2 \\
&= -t(1-t)x^2 + 2t(1-t)xy - t(1-t)y^2 \\
&= -t(1-t)(x-y)^2 \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

Ce calcul étant un peu pénible, la caractérisation par la dérivée seconde que l'on va revoir plus bas est tip top.

Remarque 4

On définit de même une fonction <u>concave</u> $g : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ g\big((1-t)x+ty\big) \geqslant (1-t)g(x) + tgf(y)$. Autrement dit, une fonction concave est l'opposée d'une fonction convexe, son graphe est **au dessus** de ses sécantes, son **hypographe** (l'ensemble des points du plan "sous" la courbe) est convexe, ses taux d'accroissements sont décroissants. L'étude des fonctions concaves est la même que celle des fonctions convexes, il suffit de renverser les inégalités.

Remarque 5

Une fonction convexe n'a aucune raison d'être dérivable, par exemple $x \mapsto |x|$ est convexe. On restreint désormais l'étude de la convexité aux fonctions dérivables.

Proposition 1 .

Supposons f dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

En particulier, si f est deux fois dérivable, alors elle est convexe si et seulement si f'' est positive.

Démonstration. On montre le premier point, le second s'en déduit par théorème sur le signe de la dérivée.

• Supposons f convexe. Alors tous ses taux d'accroissements sont croissants. Soient $x, y \in I$ et supposons $x < y$. Pour tout $z \in]x, y[$ on a $\tau_x(z) = \tau_z(x) \leqslant \tau_z(y) = \tau_y(z)$. En prenant la limite pour $z \to x$, on obtient $f'(x) \leqslant \tau_y(x)$. En prenant la limite pour $z \to y$, on obtient $\tau_y(x) \leqslant f'(y)$. On conclut par transitivité.

• Supposons f' croissante. Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. On veut montrer qu'on a $f((1-t)x+ty)-(1-t)f(x)-tf(y) \leqslant 0$. À renommage près, on peut supposer $x \leqslant y$, ce qu'on fait dans la suite. Considérons (par exemple) la fonction

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccl} [x,y] & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & f((1-t)s+ty)-(1-t)f(s)-tf(y). \end{array} \right.$$

Elle est dérivable par théorèmes généraux et on a $\forall s \in I,\ \Delta'(s) = (1-t)\Big(f'((1-t)s+ty)-f'(s)\Big) \geqslant 0$ par croissance de f. Comme $[x,y]$ est un intervalle, Δ est croissante en en particulier $\Delta(x) \leqslant \Delta(y) = 0$, cqfd. □

Quelques interprétations géométriques pour f dérivable : Là encore ces reformulations peuvent être plus ou moins immédiates, mais on ne s'attardera pas sur leurs démonstrations.

- La fonction f est convexe si et seulement si sa courbe est **au dessus de ses tangentes**.
- La fonction f est convexe si et seulement si sa courbe a l'une des trois allures suivantes :

`drawing 8`

Exemple 6 On retrouve que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée seconde est $x \mapsto 2$ qui est positive.

Évidemment, les fonctions qu'on étudie ne sont en général ni convexes ni concaves (ni croissantes ni décroissantes).

Définition 6 .
Soit $a \in I$. On dit que f présente un point d'inflexion en a lorsque f change de concavité en a.

Exemple 7 On a déjà vu que la fonction sh présente un point d'inflexion en 0.

□