Dénombrements

Dénombrements, sommes

Exercice 1. *p-uplets ? Arrangements ? Combinaisons ? Autres ? (1)*

1. Mario Kart sur SNES est un jeu de course permettant d'incarner 8 personnages. Un podium est constitué des trois meilleurs concurrents pour une course donnée. Combien de podiums sont possibles ?
2. On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 54 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir les deux jokers en main ?
3. Combien y a-t-il d'applications de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui sont strictement croissantes ?

   Indication : étant donnée une partie A de $\{1,\dots,n\}$, combien y-a-t-il d'applications strictement croissantes $f : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$ telles que $f\big(\{1,\dots,n\}\big) = A$?

Exercice 2. *p-uplets ? Arrangements ? Combinaisons ? Autres ? (2)*

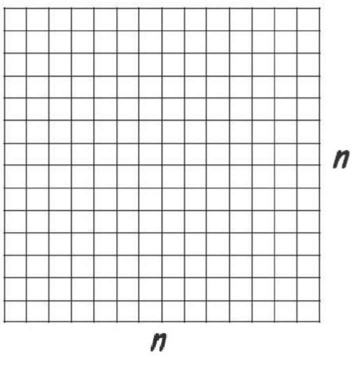
On appelera chiffre un des 10 symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1. Combien y a-t-il de suites de 4 chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'ensembles de 4 chiffres ?
3. Combien y a-t-il d'ensembles d'au plus 4 chiffres ?
4. Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres ?
5. Combien y a-t-il de nombres d'au plus 4 chiffres ?

Exercice 3. *Des sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. n personnes se réunissent. Chacune serre la main de toutes les autres. Dire combien de poignées de mains sont échangées.
2. On considère un quadrillage de taille $n \times n$. À l'aide des lignes du quadrillage, on peut identifier des carrés (de côté 1, de côté 2, etc). Dire combien on y trouve de carrés en tout.



Bergers, tiroirs

Exercice 4. On considère 10 entiers a_1, …, a_{10} compris entre 0 et 100.

Montrer qu'on peut former avec ces 10 entiers deux sommes (formellement différentes mais) de même valeur.

Pour clarifier (?) : une telle somme est une expression de la forme $x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}$ avec $k \leqslant 10$ et $i_1 < \cdots < i_k$.

Exercice 5. Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble de np éléments en n ensembles de p éléments ?

Indication : en notant $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{np}\}$ l'ensemble à np éléments, une telle partition est de la forme $\big\{\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\}, \{x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, \dots, x_{\sigma(2p)}\}, \dots, \{x_{\sigma(np-p+1)}, x_{\sigma(np-p+2)}, \dots, x_{\sigma(np)}\}\big\}$, où $\sigma \in S_{np}$.

EX N° DENOM

$\boxed{1/1}$

Meth 1

1er :	8 choix
2e :	7 choix
3e :	6 choix

Total : $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$

Meth 2

- ordre ? ✓
- répétitions ? ✗

$$\Rightarrow \quad A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

$\boxed{1/2}$

rpl probа $= \dfrac{\#\text{cas favorables}}{\#\text{cas possibles}}$

Cas possibles : une main quelconque   ordre ✗ répétitions ✗ $\Rightarrow \binom{54}{5}$

Cas favorables : on n'a de choix que pour les 3 cartes qui ne sont pas des jokers.

$$\binom{52}{3}$$

Proba : $\dfrac{\binom{52}{3}}{\binom{54}{5}} \approx 0.007$

$$f : \begin{cases} [\![1, k]\!] & \longrightarrow [\![1, n]\!] \\ 1 & \longmapsto f(1) \\ & \vdots \\ k & \longmapsto f(k) \end{cases}$$

Considérons $A = f^{\rightarrow}([\![1, k]\!])$

On dit que l'image directe de tout application

$f \in \not{\mathcal{I}}([\![1, k]\!], [\![1, n]\!])$.

$$\begin{cases} A = f^{\rightarrow}[\![1, k]\!] \in \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \\ \# A = k \quad \text{car } f \in \not{\mathcal{I}} \Rightarrow f \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Il y a $\binom{n}{k}$ parties A possibles

Réciproquement, si $\begin{cases} A = \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \\ \# A = k \end{cases}$

alors $\overset{\text{def}}{\exists !} f \in \not{\mathcal{I}}([\![1, k]\!], [\![1, n]\!]), \ A = f^{\rightarrow}[\![1, n]\!]$

$$f : \begin{cases} [\![1, k]\!] \rightarrow [\![1, n]\!] \\ 1 \longmapsto \min\{a_1, \dots, a_k\} \\ 2 \longmapsto \min(\{a_1, \ \ , a_k\} \setminus \{f(1)\}) \\ \vdots \end{cases}$$

Conclusion : Il y a $\binom{n}{k}$ telles applications.

2/1

$\begin{cases} \text{ordre} ✓ \\ \text{répétition} ✓ \end{cases} \Rightarrow$ 4-uplets de $0, 1, \dots, 4$

$\Rightarrow$ Il y en a 10 000

2/2

$\begin{cases} \text{ordre} ✗ \\ \text{répétition} ✗ \end{cases} \Rightarrow \binom{10}{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 210$

2/3

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} = 386$$

2/4

9 000

2/5

10 000

3/1

Pour n personnes :

- 1 poignée $\Rightarrow$ 2 personnes
- On ne peut pas se serrer la main à soi-même

bèH sI Je PeuT

donc $\binom{n}{n-1-1} = \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2} n(n-1)$

3/2

Carrés de côté 1 $\quad n^2$

$\qquad\qquad\quad$ 2 $\quad (n-1)^2$

$\qquad\qquad\quad \vdots$

$\qquad\qquad\quad$ n $\quad 1^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4 Soient $a_1, a_2, \dots, a_{10} \in [\![0, 100]\!]$

Pour former une somme, on peut :

- choisir a_1 ou pas $\qquad$ 2 choix

$\vdots$

- choisir a_{10} ou pas $\qquad$ 2 choix

Total $\qquad 2^{10} = 1024 = 1$ KiB

$\begin{cases} \text{maximal : } 1\,000 \\ \text{minimal : } 0 \end{cases}$

1001 valeurs possibles

D'après le principe des tiroirs, il existe une valeur correspondant à 2 sommes différentes

EXM DENOM

$\boxed{4}$ exemple

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 22, 50\}$$

Exemples de somme:

- $11 + 12$
- $11 + 13 + 15$
- $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 22$
- 16
- la somme vide

Combien de sommes ?

→ Déterminé par la donné pour chacun des éléments de l'ensemble de l'information
"cet elt est choisi" / "cet élément n'est pas choisi"

Combien de résultats ?

→

5

$$\Bigg\{ \underbrace{\overbrace{\{\dots\}}^{p \text{ éléments}}, \dots, \overbrace{\{\dots\}}^{p \text{ éléments}}}_{n \text{ éléments}} \Bigg\}$$

Nombre de façons de la créer $(np)!$

Mais on peut avoir des listes qui donnent la même permutation

Pour les ensembles donnés à $p!$ permutations
or on l'a fait n fois $(p!)^n$

On peut permuter nos n ensembles
Nombre de permutations $n!$

D'après les bergers,

$$\frac{(np)!}{(p!)^n\, n!} \quad \text{partitions possibles.}$$

5 exemple

Combien de partitions d'un ensemble à np éléments en n parties qui ont p éléments

Partition ?

$\{A_1, \dots, A_k\}$ tq $\begin{cases} \coprod_{i=1}^{k} A_i = E \\ \forall i \in [\![1, k]\!],\ A_i \neq \emptyset \end{cases}$

Exemple $\begin{cases} p = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

$E = \{x_1, \dots, x_6\}$

· ex de partitions :

- $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$
- $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$
- $\{\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_6\}\}$

Il y en a pleins d'autres mais

$\{\{x_3, x_4\}, \{x_2, x_1\}, \{x_6, x_5\}\}$

est déjà dans la liste !

Les deux questions

→ combien de façons de les écrires ← pattes

→ Pour une partition donnée, combien de façons de l'écrire ← pattes/mouton