Dénombrement

Déterminer le cardinal d'ensemble fini

I Compter avec des bijections

1 Lien cardinal—bijection

thm rappel

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ \#A, \#B \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\#A = \#B \Leftrightarrow \mathcal{B}(A,B) \neq \emptyset\right)$$

app

$$\#E = n \Rightarrow \#\mathcal{P}(E) = 2^n$$

par ex. $\mathbb{1} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^E \\ X \longmapsto \mathbb{1}_X \end{cases}$

remq En général, on met la bijection sous le tapis, et on a bien raison.

ex Soit $\begin{cases} E \text{ un ensemble de cardinal } n \\ A \subset E \text{ tq } \#A = p \end{cases}$

Pour construire une partie X de E tel que $\#(X \cap A) = 1$, on doit :

- Choisir un élément de A : p choix
- Choisir 0 ou plus éléments de $E \setminus A$: 2^{n-p} choix

tot $p2^{n-p}$ parties possibles

Ici la bijection cachée est

$$\begin{cases} A \times \mathcal{P}(E \setminus A) & \longrightarrow \text{parties convenables} \\ (a, X) & \longmapsto \{a\} \sqcup X \end{cases}$$

2 p-uplets et arrangements

rpl Soit E tq $\#E \in \mathbb{N}$

- On appelle p-uplets (ou p-liste) d'éléments de E une expression de la forme $(x_1, \dots, x_p)$ où
  $\forall i \in [\![1, p]\!], \; x_i \in E$

  autrement dit, un élément de E^p

- le nombre de p-uplets est $(\#E)^p$

bilan lorsqu'on doit compter des structures ordonnées, avec répétitions possibles, on compte des p-uplets et on trouve donc n^p

ex On note le 5-uplet des résultats obtenus en exécutant >>> Choisir(MPSI) 5 fois de suite.

def p-arrangements d'éléments de E

Un p-uplets formés d'éléments distincts de E

notn Nombre de p-arrangements d'un ensemble E de card. n

$$\mathcal{A}_n^p$$

thm

$$\mathcal{A}_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n-p \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

bilan lorsqu'on doit compter des structures qui sont ordonnées mais sans répétitions, on compte des arrangements et on en trouve $\mathcal{A}_n^p$

ex On note le 5-uplet (et 5-arrangement) des résultats obtenus en exécutant >>> Ramasser(5, MPSI)

Il y en a $46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42$

dem Pour se donner un p-arrangement $(x_1, \dots, x_p)$ d'un ensemble de cardinal n, on doit

- se donner x_1 n choix
- se donner x_2 $n-1$ choix
- se donner x_3 $n-2$ choix

- se donner x_4 : $n-3$ choix

$\vdots$

- se donner x_p : $n-p+1$ choix

tot $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ choix

remq

Soit E, F tq $\#E, \#F \in \mathbb{N}$.

p-arrangements de $E \simeq \Theta\odot(F, E)$

Notons $F = \{f_1, \dots, f_p\}$

$$\phi : \begin{cases} p\text{-arrangements de } E \longrightarrow \Theta\odot(F, E) \\ (x_1, \dots, x_p) \longmapsto (f_i \longmapsto x_i) \end{cases}$$

donc $\# \Theta\odot(F, E) = \mathcal{A}_n^p$

Cas particulier ($F = E$) :

$$\begin{cases} \# \Theta\odot(E, E) = \mathcal{A}_n^n \\ \quad \| \text{ car } \#E \in \mathbb{N} \\ \# \Theta\circledast(E, E) = \dfrac{n!}{(n-n)!} \\ \quad \| \\ \#S_E = n! \end{cases}$$

II Compter avec des surjections

1 Lemme des bergers

<u>lemme</u> des bergers

1. Pour compter les moutons, on compte les pattes et on divise par 4

2. Si $E = \coprod_{i \in I} E_i$

   où $\#E, \#I, \#E_i \in \mathbb{N}$

   tels que $\forall i \in I, \#E_i = p$

   Alors $\#I = \dfrac{\#E}{p}$

3. Si $\begin{cases} \#E = n \in \mathbb{N} \\ \#F \in \mathbb{N} \end{cases}$, et qu'il existe $f \in \mathcal{S}(E, F)$

   telle que $\forall x \in F, \#f^{\leftarrow}(\{x\}) = p$

   alors $\#F = \dfrac{\#E}{p}$

<u>dem</u> par principe de découpage

2 Combinaisons

rpl

- Soit $\#E \in \mathbb{N}$.

  k-combinaison := partie de E à k éléments

- On note $\binom{n}{k}$ le nombre de k-combinaisons d'un ensemble de cardinal n

thm rappel

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dem avec le lemme des bergers

Écartons le cas TRIVIAL où $k > n$.

On a ainsi $k \leqslant n$. Considérons l'application

$$\phi : \begin{cases} k\text{-arrangements de } E & \longrightarrow k\text{-combinaisons de } E \\ (x_1, \dots, x_k) & \longmapsto \{x_1, \dots, x_k\} \end{cases}$$

Pour toute k-combinaison $\{x_1, \dots, x_k\}$.

On a:

$$\#\Phi^{-1}(\{\{x_1, \dots, x_k\}\})$$

$$= \#\{(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}), \sigma \in S_n\}$$

$$= \# S_k$$

$$= k!$$

D'après le lemme des Bergers,

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>bilan</u> Lorsqu'on doit compter des structures qui sont non ordonnés et sans répétitions, on compte des combinaison et on en trouve $\binom{n}{k}$

III Détecter avec des injections

1 Principe des tiroirs

<u>lemme</u> principe des tiroirs

- Si on range m chaussettes dans n tiroirs avec $m > n$, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

2. Si $\begin{cases} \#E = n \in \mathbb{N} \\ \#F = m \in \mathbb{N} \\ m > n \end{cases}$

Alors $\mathcal{I}(F, E) = \emptyset$

3. Sous les mêmes hypothèses,

$$\mathcal{S}(E, F) = \emptyset$$

2 Exemple d'applications

exo Soit $(G, \times)$ un groupe fini
et $P \in \mathcal{P}(G)$ stable par $\times$ et non-vide

Montrer que $(P, \times) \underset{s-g}{\subset} (G, \times)$.

On doit montrer :

$$\begin{cases} \cancel{P \subset G} & \text{ok par hyp} \\ \cancel{P \text{ stable } \times} & \text{ok par hyp} \\ 0_G \in P \\ P \text{ stable } \cdot^{-1} \end{cases}$$

$P \neq \emptyset$ donc il existe $g \in P$

Par stabilité par produit, $g^2 \in P$

Par stabilité par produit, $g^3 \in P$

$\vdots$

Par stabilité par produit $g^n \in P$

G est fini, notons $N = \# G \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{g, g^2, g^3, \dots, g^{N+1}}_{N+1 \text{ éléments}} \in \underbrace{G}_{\text{de cardinal } N}$$

D'après le principe des tiroirs,

$\exists i \neq j \in [\![1, n+1]\!], \quad g^i = g^j$

ÀRP, $i < j$ et $g^i = g^j$

ie $e = g^{j-i}$ par produit avec g^{-i}

et $j - i \in [\![1, N]\!]$ donc $g^{j-i} \in P$

donc $e \in P$

Pour tout $g \in P$ le raisonnement précédent montre que

$\exists k \in [\![1, N]\!], \quad g^k = e$ ie $g^{k-1} g = g g^{k-1} = e$

donc $g^{-1} = g^{k-1} \in P$ d'où $P \underset{s-g}{\subseteq} G$ $\square$