Décompositions en éléments simples

Exercice 1. *Cas scindé à racines simples*

1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^2-7X+6}{X^3-5X^2+6X}$ puis $\dfrac{X^5-5X^4+31X^2-43X+6}{X^3-5X^2+6X}$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3-6X-19}{2X^3-11X^2+7X+20}$.
3. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^4-7X^3+17X^2-17X+6}{X^4-5X^3+9X^2-7X+2}$.

Exercice 2. *Cas scindé*

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^4}{X^3+3X^2+3X+1},\quad \frac{1}{4X^4-12X^3+13X^2-6X+1}.$$

Exercice 3. *Cas sans facteur multiple*

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^3+1},\quad \frac{1}{X^4+1},\quad \frac{X^6}{X^4+X^2+1}.$$

Exercice 4. *Cas général*

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{4}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1},\quad \frac{X^5}{X^4+2X^3+3X^2+2X+1}.$$

(on pourra faire la division euclidienne de $X^4+2X^3+3X^2+2X+1$ par X^2+X+1.)

Exercice 5. *Applications*

Calculer les intégrales et sommes suivantes :

a. $\displaystyle\int_4^8 \frac{t^3}{t^3-t^2-6t}\,\mathrm{d}t$,

b. $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{t^2-7t+6}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$ (attention à ne pas écrire de bêtise : $\ln(x)$ n'a de sens que pour...),

c. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$,

d. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Exercices DES

$\boxed{1/1}$ $$\frac{X^2-7X+6}{\underbrace{X^3-5X^2+6X}_{B}} = \frac{X^2-7X+6}{X(X-2)(X-3)} = \frac{A}{B}$$

B est scindé à racines simples:

$$= Q + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-2} + \frac{\gamma}{X-3}$$

$Q = 0$ car $\deg A < \deg B$ $(\Leftarrow 2 < 3)$

$$\frac{X^2-7X+6}{X^3-5X^2+6X} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-2} + \frac{\gamma}{X-3} \quad \big) \cdot X$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2-7X+6}{(X-2)(X-3)} = \alpha + X[\ldots] \quad \big) \text{« } X = 0 \text{ »}$$

$$\frac{6}{6} = \alpha = 1$$

$$\frac{X^2-7X+6}{X^3-5X^2+6X} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-2} + \frac{\gamma}{X-3} \quad \big) \; X-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2-7X+6}{X(X-3)} = \beta + (X-2)[\ldots] \quad \big) \text{« } X = 2 \text{ »}$$

$$\Rightarrow \frac{4-14+6}{-2} = \beta = 2$$

$$\frac{X^2-7X+6}{X(X-2)} = \gamma + (X-3)[\ldots] \quad \big) \text{« } X = 3 \text{ »}$$

$$\Rightarrow \frac{9-21+6}{3} = \gamma = -2 \qquad \text{d'où } \frac{X^2-7X+6}{X(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X} + \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X-3}$$

##DES Exercices###

$\boxed{2}$

$$\frac{X^4}{X^3+3X^2+3X+1} \qquad X^3+3X^2+3X+1 \text{ a pour racine évidente } -1.$$

$$= (X+1)^3$$

$$\frac{X^4}{X^3+3X^2+3X+1} = \underset{?}{Q} + \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{(X+1)^3}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 & X^3+3X^2+3X+1 \\ \ominus\; X^4+3X^3+3X^2+X & X-3 \\ \hline -3X^3-3X^2-X & \\ \ominus\; -3X^3-9X^2-9X-3 & \\ \hline 6X^2+8X+3 & \end{array}$$

$$\frac{X^4}{(X+1)^3} = Q + \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{(X+1)^3}$$

$(X+1)^3$

$$X^4 = \gamma + (X+1)[\cdots]$$

$X=-1$

$$\gamma = 1$$

$R = A - BQ$

$$\frac{6X^2+8X+3}{(X+1)^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{1}{(X+1)^3}$$

B

$$\Leftrightarrow \frac{6X^2+8X+2}{(X+1)^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2}$$

$\boxed{2/1}$ suite

Décomposition en éléments simples, exercices

(*)

$$\frac{6X^2+8X+2}{(X+1)^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3X^2+4X+1)}{(X+1)^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3X+1)(X+1)}{(X+1)^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3X+1)}{(X+1)^2} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2}$$

Trouvons β

$$\xrightarrow{X(X+1)^2} 2(3X+1) = \beta + (X+1)(\dots)$$

$$\xrightarrow{«X=-1»} \beta = -4$$

$$\frac{2(3X+1)}{(X+1)^2} - \frac{-4}{(X+1)^2} = \frac{\alpha}{X+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6X+2+4}{(X+1)^2} = \frac{\alpha}{X+1} \Leftrightarrow \frac{6\cancel{(X+1)}}{(X+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\alpha}{X+1} \Rightarrow \alpha = 6$$

(*) $B(X) = 4X^4 - 12X^3 + 13X^2 - 6X + 1 \qquad B(1) = 0$

$B'(X) = 16X^3 - 36X^2 + 26X - 6 \qquad B'(1) = 0$

$B''(X) = 48X^2 - 72X + 26 \qquad B''(1) = 2 \neq 0$

1 est une racine double.

$B(-1) < 0$

$$\begin{array}{r|l} 4X^4-12X^3+13X^2-6X+1 & X^2-2X+1 \\ \ominus\ 4X^4-8X^3+4X^2 \quad\quad\quad & \hline 4X^2-4X+1 \\ \hline -4X^3+9X^2-6X+1 & \\ \ominus\ -4X^3+8X^2-4X \quad & \\ \hline X^2-2X+1 & \\ \ominus\ X^2-2X+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$4X^2-4X+1 = (2X-1)^2$$

La forme théorique de la DES est

$$\frac{1}{B(X)} = \underset{\substack{\uparrow \\ C}}{Q} + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{2X-1} + \frac{\delta}{(2X-1)^2}$$

car $\deg 1 = 0 < \deg(B(X)) = 4$

$\cdot (X-1)^2$

Trouvons β

$$\frac{1}{(2X-1)^2} = \beta + (X-1)[\ldots\ldots]$$

Évaluons en 1 $\quad 1 = \beta$

$\cdot (2X-1)^2$

Trouvons δ

$$\frac{1}{(X-1)^2} = \delta + (2X-1)[\ldots\ldots]$$

Évaluons en $1/2$ $\quad 4 = \delta$

Pour α et γ

↳ Evaluons en 0

$$\frac{1}{B(0)} = -\alpha+\beta-\gamma+\delta$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\gamma = \beta+\delta-1 = 4$$

↳ Multiplions par X et faisons tendre X vers $+\infty$

$$\frac{X}{X^4+\dots+1} = \alpha\frac{X}{X-1}+\beta\frac{X}{(X-1)^2}+\gamma\frac{X}{2X-1}+\frac{\delta X}{\dots}$$

Pour $X \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$0 = \alpha+0+\frac{\gamma}{2}+0$$

ie $\gamma = -2\alpha$

D'où $\alpha - 2\alpha = 4$

$\Leftrightarrow -\alpha = 4$

$\Leftrightarrow \alpha = -4$

et donc $\gamma = 8$

Conclusion $\dfrac{1}{B(X)} = \dfrac{-4}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{8}{2X-1} + \dfrac{4}{(2X-1)^2}$

DES, exercices

$\boxed{3}$

$$\frac{1}{X^3+1} =: \frac{A}{B}$$

$B = id^3 + 1$

$B(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$

$B' = 3id^2$

$B'(-1) = 3 \neq 0$

Donc on peut factoriser B par $X+1$

$$\begin{array}{rl|l} & X^3 + 1 & X+1 \\ \ominus & X^3 + X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline & -X^2 + 1 & \\ \ominus & -X^2 - X & \\ \hline & X + 1 & \\ \ominus & X + 1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$X^3 + 1 = (X+1)(X^2+X+1)$

$$\frac{-1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2-X+1}$$

$$\frac{1}{X^2-X+1} = \alpha + (X+1)(\dots)$$

On évalue X en -1

$$\frac{1}{1+1+1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{X}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\alpha X}{X+1} + \frac{\beta X^2+\gamma X}{X^2-X+1}$$

$X \longrightarrow +\infty \qquad 0 = \alpha+\beta$

$\Leftrightarrow \beta = -\alpha = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{2}{3}$$

donc $\dfrac{1}{X^3+1} = \dfrac{1}{3(X+1)} + \dfrac{-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}}{X^2-X+1}$

Meth 1

$$\begin{aligned} B &= X^4+1 \\ &= X^4+2X+1-2X \\ &= (X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2 \\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

Meth 2 On factorise dans $\mathbb{C}$

On résout $z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1$

$z \overset{def}{=} re^{i\theta}$. On a $-1 = 1e^{i\pi}$

On a $z^4+1=0 \Leftrightarrow r^4e^{i4\theta} = e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \Leftrightarrow r=1 \\ \theta \equiv \pi \ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{-\frac{3i\pi}{4}}, e^{-\frac{i\pi}{4}} \right\}$$

Donc $1X^4+1 = 1\underbrace{(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})}(\underbrace{X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}})$

$$= \left(X^2 - \left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)X + e^{\frac{i\pi}{4}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)(\cdots)$$

$$= \left(X^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}X + e^{0}\right)(\cdots)$$

$$= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)(\cdots)$$

$$\frac{1}{X^4+1} = \underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2-\sqrt{2}X+1}$$

On multiplie par $X^2-\sqrt{2}X+1$ et on évalue en $X=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$$\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \gamma X+\delta + (X^2-\sqrt{2}X+1)(\cdots)$$

$$\frac{1}{0+2(1+i)} = \gamma\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + \delta + 0$$

ie $\dfrac{1-i}{2(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\gamma + \delta + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\gamma$

ie $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma + \delta + i\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma$

ie $\begin{cases} 1/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma + \delta \\ -1/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

$\frac{1}{X^4+1}$ est pair

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{(-X)^4+1} \Leftrightarrow \frac{\alpha X+\beta}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{\gamma X+\delta}{X^2-\sqrt{2}X+1}$$

$$= \frac{-\alpha X+\beta}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{-\gamma X+\delta}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

donc $\begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = \delta \\ \gamma = -\alpha \\ \delta = \beta \end{cases}$

donc $\begin{cases} \alpha = \sqrt{2}/4 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

$\frac{X^6}{X^4+X^2+1}$

$$X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+1-X^2$$
$$= (X^2+1)^2 - X^2$$
$$= \underbrace{(X^2+2X+1)}_{\Delta=-3} \underbrace{(X^2-X+1)}_{\Delta=-3}$$

Forme théorique

$$\frac{X^6}{X^4+X^2+1} = Q + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2-X+1}$$

<u>Trouvons β</u> On multiplie par X puis on fait tendre vers $+\infty$

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = \alpha + \frac{\beta X^2 + \gamma X}{X^2+1} + \frac{\delta X^2 + \varepsilon X}{(X^2+1)^2}$$

$$0 = \alpha + \beta + 0 \Rightarrow \beta = -1$$

<u>Trouvons δ et ε</u> On multiplie par $(X^2+1)^2$ et on évalue en i

$$\frac{1}{X} = \delta X + \varepsilon + (X^2+1)(\ldots)$$

avec $X = i$

$$-i = \delta i + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -1 \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

<u>Trouvons γ</u> On évalue en 1

$$\frac{1}{1(1^2+1)^2} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta 1 + \gamma}{1^2+1} + \frac{\delta 1 + \varepsilon}{(1^2+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta + \varepsilon$$

$$= 4 - 2 + 2\gamma - 1 + 0$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Décomposition en Éléments simples, Exercices

$\boxed{4/2}$

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1$$
$$=X^4+X^3+X^2+X^2+X+1+X^3+X^2+X$$
$$=X^2(X^2+X+1)+1(X^2+X+1)+X(X^2+X+1)$$
$$=(X^2+X+1)^2$$

$$\begin{array}{r|l}
X^5 & X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \\ \cline{2-2}
\ominus\ X^5+2X^4+3X^3+2X^2+X & \underbrace{X-2} \\ \cline{1-1}
-2X^4-3X^3-2X^2-X & \\
\ominus\ -2X^4-4X^3-6X^2-4X-2 & \\ \cline{1-1}
X^3+4X^2+3X+2 &
\end{array}$$

$$\frac{X^5}{(X^2+X+1)^2}=\underbrace{X-2}+\frac{\overbrace{X^3+4X^2+3X+2}}{(\underbrace{X^2+X+1}_{B})^2}=:\frac{A}{B^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{X^3+4X^2+3X+2}^{A} & \overbrace{X^2+X+1}^{B} \\ \cline{2-2}
\ominus\ X^3+X^2+X & X+3 \\ \cline{1-1}
3X^2+2X+2 & \\
\ominus\ 3X^2+3X+3 & \\ \cline{1-1}
-X-1 &
\end{array}$$

$$X^3+4X^2+3X+2 = (X+5)(X^2+X+1) + (-X-1)$$

$\div (X^2+X+1)^2$

$$\frac{X^3+4X^2+3X+2}{(X^2+X+1)^2} = \frac{(\overset{\alpha}{X}+\overset{\beta}{3})\cancel{(X^2+X+1)}}{(X^2+X+1)^{\cancel{2}}} + \frac{\overset{\gamma}{-}X-\overset{\delta}{1}}{(X^2+X+1)^2}$$

$\boxed{5/1}$

Petit secret Racines de X^2-SX+P

Sont deux nombres $\begin{cases} \text{de some } S \\ \text{de produit } P \end{cases}$

$$\frac{t^3}{t^3-t^2-6t} = \frac{t^2}{t^2-t-6} = \frac{t^2}{(t-3)(t+2)}$$

$$t^2 = \underbrace{1}_{Q}(t^2-t-6) + \underbrace{(t+6)}_{R}$$

$$\frac{t^3}{t^3-t^2-6t} = 1 + \frac{\alpha}{t-3} + \frac{\beta}{t+2}$$

$\cdot(t+2);\ t \overset{\text{eval}}{=} -2$ $\qquad$ $\cdot(t-3);\ t \overset{\text{eval}}{=} 3$

$\alpha = \frac{9}{5}$ $\qquad$ $\beta = -\frac{4}{5}$

$$\int_4^8 \frac{t^3}{t^3-t^2-6t} = \int_4^8 dt + \frac{9}{5}\int_4^8 \frac{dt}{t-3} - \frac{4}{5}\int_4^8 \frac{dt}{t+2}$$

$$= [\mathrm{Id}]_4^8 + \frac{9}{5}\left[\ln|t-3|\right]_{t=4}^8 - \frac{4}{5}\left[\ln|t+2|\right]_{t=4}^8$$

$$= 4 + \frac{9}{5}(\ln 5 - \ln 1) - \frac{4}{5}(\ln(10) - \ln 6)$$

$$= 4 + \frac{9}{5}\ln 5 - \frac{4}{5}\ln 5 - \cancel{\frac{4}{5}\ln 2} + \frac{4}{5}\ln 3 + \cancel{\frac{4}{5}\ln 2}$$

$$= 4 + \ln 5 + \frac{4}{5}\ln 3$$

$\boxed{5/2}$

$$t^3-5t^2+6t = t(t^2-5t+6)$$

$$= t(t-2)(t-3)$$

Calcul de Q $\quad Q=0$

$$\frac{t^2-7t+6}{t(t-2)(t-3)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t-2} + \frac{\gamma}{t-3}$$

$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = -2$

$$\int_1^{3/2} \frac{t^2-7t+6}{t(t-2)(t-3)}dt = \int_1^{3/2}\frac{1}{t}dt + 2\int_1^{3/2}\frac{dt}{t-2} + 2\int_{3/2}^1 \frac{dt}{t-3}$$

$$= \ln\frac{3}{2} + 2\ln\frac{1}{2} - 2\ln\frac{3}{2} + 2\ln 2$$

$$= -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \ln\frac{2}{3}$$

$\boxed{5/3}$

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \Big(\underbrace{\frac{1/2}{2k-1}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1/2}{2k+1}}_{a_{k+1}} \Big) \quad \Sigma$$

$$= a_2 - a_{n+1}$$

$$= \frac{1/2}{2\cdot 2-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+2}$$

$\boxed{5/4}$

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)}$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1/2}{k-1} + \frac{1/2}{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k} + \frac{1/2}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \Big(\underbrace{\frac{1}{k-1}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_{k+1}} \Big) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \Big(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \Big) \quad \Sigma$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 - a_n) - \frac{1}{2}(a_2 - a_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Une décomposition en éléments simples

Énoncé : Décomposez en éléments simples $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2}$.

Corrigé : Le dénominateur se factorise $X^3(X-1)^2(X+1)^2$. La forme théorique de la décomposition est donc $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{(X-1)^2} + \dfrac{f}{X+1} + \dfrac{g}{(X+1)^2}$.
Le quotient est nul car le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

• La fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2}$ **est impaire** *i. e.* $\dfrac{1}{(-X)^3((-X)^2-1)^2} = -\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2}$ ou encore $\frac{-a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{-c}{X^3} + \frac{-d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{-f}{X-1} + \frac{g}{(X-1)^2} = \frac{-a}{X} + \frac{-b}{X^2} + \frac{-c}{X^3} + \frac{-d}{X-1} + \frac{-e}{(X-1)^2} + \frac{-f}{X+1} + \frac{-g}{(X+1)^2}$.
D'où, par unicité d'une décomposition en éléments simples, on a $\boxed{b=0}$ et $\boxed{f=d}$ et $\boxed{g=-e}$.
C'est pas mal, mais avec $\frac{1}{X^3(X^2+1)^2}$, on avait directement trois coefficients nuls, c'était mieux.

À ce stade : $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{c}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{(X-1)^2} + \dfrac{d}{(X+1)} - \dfrac{e}{(X+1)^2}$.

• On multiplie par X^3, on trouve $\dfrac{1}{(X^2-1)^2} = c + X^2\left(a + \dfrac{dX}{X-1} + \dfrac{eX}{(X-1)^2} + \dfrac{dX}{(X+1)} - \dfrac{eX}{(X+1)^2}\right)$, puis on évalue en 0 ce qui donne $\boxed{c=1}$.

À ce stade : $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{1}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{(X-1)^2} + \dfrac{d}{(X+1)} - \dfrac{e}{(X+1)^2}$.

• On multiplie par $(X-1)^2$, on trouve $\dfrac{1}{X^3(X+1)^2} = e+(X-1)\left(\dfrac{a(X-1)}{X} + \dfrac{(X-1)}{X^3} + d + \dfrac{d(X-1)}{(X+1)} + \dfrac{g(X-1)}{(X+1)^2}\right)$, puis on évalue en 1 ce qui donne $\boxed{e=\frac{1}{4}}$.

À ce stade : $\dfrac{1}{X^3(X^2-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{1}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{1/4}{(X-1)^2} + \dfrac{d}{(X+1)} - \dfrac{1/4}{(X+1)^2}$.

• On multiplie par X et on fait tendre X vers $+\infty$, on trouve $0 = a+d+d$ *i. e.* $\boxed{a=-2d}$. Puis on évalue en i (par exemple), on trouve : $\frac{\mathrm{i}}{4} = -a\mathrm{i} - d\mathrm{i} + \frac{5}{4}\mathrm{i}$ *i. e.* $\boxed{a+d=1}$ et ces deux équations donnent immédiatement $d=-1$ et $a=2$.

$$\boxed{\textsc{Conclusion} : \frac{1}{X^3(X^2-1)^2} = \frac{2}{X} + \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X-1} + \frac{1/4}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)} - \frac{1/4}{(X+1)^2}.}$$

On peut, bien sûr, procéder autrement.