Décomposition en éléments simples

Maintenant c'est "DES"

<u>Objectif</u> Expliquer la méthode qui se cache derrière le truc de Laroche.

<u>Utilité</u>

- Calcul d'intégrales
- Calcul de Σ
- Calcul de transformés de Laplace

Reflexe à avoir au long terme :

Lorsqu'on efface à une fraction rationelle,[1] on fait une DES <u>d'abord</u> et <u>ensuite</u> on négocie

I Cas scindé à racines simples

<u>thm</u> Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec B scindé à racine simple

ie de la forme $B = \mu \prod_{i=0}^{r} X - \lambda_i$

[1] Fraction de polynômes $\frac{P(X)}{Q(X)}$

Alors :

$$\exists ! (Q, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^r$$

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{X-\lambda_r}$$

De plus Q est le quotient dans la DES de A par B

eg
$$\frac{\overbrace{X^3}^{A}}{\underbrace{X^2-1}_{B}}$$

On a $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ qui est bien sàrs[1]

D'après thm, on peut trouver $Q, \overbrace{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{racines}}$ tel que

$$\frac{X^3}{X^2-1} = Q + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1}$$

Mieux $Q = aX + b$

$$\frac{X^3}{X^2-1} = \frac{(aX+b)(X^2-1) + \alpha_1(X+1) + \alpha_2(X-1)}{X^2-1}$$

$$\Leftrightarrow X^3 = (aX+b)(X^2-1) + \alpha_1(X+1) + \alpha_2(X-1)$$

---

[1] Scindé à racines simples.

$$= aX^3 + bX^2 - aX - b + \alpha_1 X + \alpha_1 + \alpha_2 X - \alpha_2$$

$$= aX^3 + bX^2 + (-a + \alpha_1 + \alpha_2)X - b$$

$$\Leftrightarrow (a-1)X^3 + bX^2 + (-a+\alpha_1+\alpha_2)X - b + \alpha_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b = 0 \\ -a + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -b + \alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ b = \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ??? \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 1/2 \end{cases}$$

<u>remq</u> On a $A = BQ + R$

Donc $\frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{X-\lambda_r}$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B} - Q = \frac{A-BQ}{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{X-\lambda_r}$$

<u>Méthode efficace</u>

1. On calcule Q par DE
2. Pour calculer les α_k, on multiplie par $X - \alpha_k$ puis on évalue en λ_k

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_k}{X-\lambda_k} + Q + \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{X-\lambda_{k-1}} + \cdots +$$

$(X-\lambda_k)\downarrow$

$$\frac{A}{\mu(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{k-1})(X-\lambda_{k+1})\cdots(X-\lambda_r)} = \alpha_k + (X-\lambda_k)[\ldots]$$

«$X=\lambda_k$»$\downarrow$

$$\sim\sim = \alpha_k + 0$$

Sur l'exemple

$$\frac{X}{X^2-1} = Q + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1}$$

$$X^3 = X^3 - X + X = (X^2-1)\cdot\underbrace{X}_{Q} + \underbrace{X}_{\deg<2}$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2-1 \\ \ominus\ X^3-X & X \\ \hline X & \end{array}$$

$$\frac{X^3}{X^2-1} = Q + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1} \quad \downarrow \times (X-1)$$

$$\frac{X^3}{X+1} = \alpha + (X-1)\left[Q + \frac{\alpha_2}{X+1}\right] \quad \downarrow «X=1»$$

$$\frac{1^3}{1+1} = \alpha + 0\cdot[\ldots]$$

ie $\alpha_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{X^3}{X^2-1} = Q + \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1} \quad \downarrow \times (X+1)$$

$$\frac{X^3}{X-1} = \alpha_2 + (X+1)\left(Q + \frac{\alpha_1}{X-1}\right) \quad \downarrow «X=-1»$$

$$\frac{(-1)^3}{-1-1} = \alpha_2 + 0 \quad \text{i.e. } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Décomposition en éléments simples

II Cas scindé

eg

$\frac{3X+2}{X^3-2X^2+X}$ Factorisons le dénominateur.

$$X^3-2X^2+X = X(X^2-2X+1) = X(X-1)^2$$

Il est scindé, mais pas à racine simple, il a une racine double : 1.

Dans ce cas, la forme théorique de la DES est :

$$\frac{3X+2}{X^3-2X^2+X} = \underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2}$$

$=0$ car $\deg(3X+2) < \deg(X^3-2X^2+X)$

Pour α, rien ne change :

$\cdot X \curvearrowright$ $\frac{3X+2}{(X-1)^2} = \alpha + X[\dots]$

$X=0 \curvearrowright$ $\alpha = 2$.

Pour γ, pareil :

$\cdot(X-1)^2 \curvearrowright$ $\frac{3X+2}{X} = \gamma + (X-1)[\dots]$

$X=1 \curvearrowright$ $\gamma = 5$

Pour β, pb ! (on diviserait par zéro)

pour le trouver :

(Meth 1) On soustrait $\frac{\gamma}{(X-1)^2}$ (connu) à l'égalité initiale

(Meth 2) On reinjecte et on indentifie.

(Meth 3) On évalue en un réel $\notin \{0, 1\}$

(Meth 4) On multiplie par X et $X \longrightarrow +\infty$

$$\cdot X \curvearrowright \quad \frac{3X+2}{(X-1)^2} = \alpha + \beta \frac{X}{X-1} + \gamma \frac{X}{(X-1)^2}$$

$$X \to +\infty \curvearrowright \quad 0 = \alpha + \beta + 0$$

dc $\beta = -\alpha = -2$.

<u>thm</u> Cas scindé

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tq B est <u>scindé</u> ie de la forme

$$B = \mu \prod_{i=0}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$$

Alors $\exists ! \, (Q, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,m_r})$ tq

$$\frac{A}{B} = Q + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-\lambda_i)^j}$$

Décomposition en éléments simples

III Cas sans facteur multiple

eg La forme théorique de la DES de $\dfrac{1}{X(X^2+1)(X^2+4)}$ est :

$$\underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2+1} + \frac{\delta X+\varepsilon}{X^2+4}$$

Trouvons α

On multiplie par X : $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \alpha + X(\dots)$

On évalue en 0 $\dfrac{1}{4} = \alpha$

Pour $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ on peut

On multiplie par X puis faire $X \longrightarrow +\infty$

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \alpha + \frac{\beta X^2+\gamma X}{X^2+1} + \frac{\delta X^2+\varepsilon X}{X^2+4}$$

donc $0 = \alpha + \beta + \delta$

ie $\beta + \delta = -\dfrac{1}{4}$

↳ On évalue en 1.

$$\frac{1}{10} = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\delta+\varepsilon}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 10\alpha + 5\beta + 5\gamma + 2\delta + 2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 5\beta + 5\gamma + 2\delta + 2\varepsilon = -\frac{3}{2} \qquad (\star)$$

On évalue en -1.

$$-\frac{1}{10} = -\alpha + \frac{-\beta+\gamma}{2} + \frac{-\delta+\varepsilon}{5}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -10\alpha - 5\beta + 5\gamma - 2\delta + 2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -5\beta + 5\gamma - 2\delta + 2\varepsilon = \frac{3}{2} \qquad (\star\star)$$

$(\star) + (\star\star)$ donne $10\gamma + 4\varepsilon = 0$

$(\star) - (\star\star)$ donne $10\beta + 4\delta = -3$

↳ NEW : Utiliser la parité et l'unicité d'une DES

$$f(X) = \frac{1}{B(X)}$$

$$f(-X) = -f(X) \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{X} + \frac{-\beta X+\gamma}{X^2+1} + \frac{-\delta X+\varepsilon}{X^2+4}$$

$$= \frac{-\alpha}{X} + \frac{-\beta X-\gamma}{X^2+1} + \frac{-\delta X-\varepsilon}{X^2+4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\gamma \Rightarrow \gamma = 0 \\ \varepsilon = -\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\beta + 4\delta = -1 \\ 10\beta + 4\delta = -3 \end{cases}$$

par différence $-6\beta = 2$ ie $\beta = -\frac{1}{3}$

Réinjectons:

$4\delta = -1 - 4\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \delta = \frac{1}{12}$

Meth 2 On utilise les racines complexes !

On multiplie par X^2+1 puis on évalue en i

$$\frac{1}{X(X^2+4)} = \beta X + \gamma + (X^2+1)(\dots)$$

avec $X = i$ $\beta i + \gamma = \frac{1}{i(i^2+4)} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}$

Deux complexes sont égaux ssi Re et Im sont égales

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On multiplie par X^2+4 puis on évalue en $2i$

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \delta X + \varepsilon + (X^2+4)(\dots)$$

avec $X = 2i$

$$2\delta i + \varepsilon = \frac{1}{2i}(2i^2+1) = \frac{i}{6}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ 2\delta = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \delta = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Décomposition en éléments simples

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ sans facteurs multiples ie

$$B = \mu \prod_{k=1}^{r} X - \lambda_k \prod_{k=1}^{s} X^2 + b_k X + c_k$$

Alors $\exists ! \, (Q, \alpha_1, .. \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^{r+2s}$

tq $$\frac{A}{B} = Q + \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\beta_k X + \gamma_k}{X^2 + b_k X + c_k}$$

De plus $Q = \text{quo}(A, B)$

eg $\frac{1}{X(X^2+1)^2}$. forme théorique :

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2+1} + \frac{\delta X + \varepsilon}{(X^2+1)^2}$$

Trouvons α : on multiplie par X et on évalue en 0

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = \alpha + X(\dots\dots)$$

donc $\frac{1}{(0^2+1)^2} = \alpha = 1$.

IV

<u>thm</u> Cas général

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]^*$

Avec $B = \mu(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_1}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \cdots (X^2+b_sX+c_s)^{n_s}$

$\exists ! (Q, \alpha_{1,1}, \ldots \alpha_{1,m_1}, \ldots, \alpha_{r,1}, \ldots, \alpha_{r,m_r}, \beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,n_1}, \beta_{s,1}, \ldots,$

$\beta_{s,m_s}, \ldots, \gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{1,m_1}, \ldots, \gamma_{s,1}, \ldots, \gamma_{s,m_s}),$

$$\frac{A}{B} = Q + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-\lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\beta_{ij} X + \gamma_{ij}}{(X^2+b_i X + c_i)^j}$$

V Application. intégration des FR

<u>Méthode</u> 1. On la décompose en elt simples

2. On utilise la linéarité

$$\int \frac{A}{B} = \int Q + \int \cdots + \int \cdots \quad \cdots$$

cf. poly.

Éléments simples :

- $Q(X)$: ez
- $\frac{\alpha}{X-\lambda}$: faisable
- $\frac{\alpha}{(X-\lambda)^m}$: ez
- $\frac{\alpha X+\beta}{aX^2+bX+c}$: Mr Stark I don't feel so good
- $\frac{\alpha X+\beta}{(aX^2+bX+C)^n}$: faisable++

eg $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+x}+1}$

identité remarquable : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Posons $t = x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t-\frac{1}{2}$

$\dfrac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2+1}$$

Posons $\xi^2 = \frac{3}{4}t^2 \Leftrightarrow \xi = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{2/\sqrt{3}\ d\xi}{\xi^2 + 1}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + 1}$$

Décomposition en éléments simples

Erratum : $\frac{4}{3}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2+1} \to \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\frac{4}{3}t^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

Posons $z = \frac{2t}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} z + \mathbb{R}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2t}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

$\square$