

Décomposition en éléments simples

Maintenant c'est "DES".

Objectif Expliquer la méthode qui se cache derrière le truc de Larocche.

Utilité

- Calcul d'intégrales
- Calcul de Σ
- Calcul de transformés de Laplace

Reflexe à avoir au long terme :

Lorsqu'on efface à une fraction rationnelle,¹ on fait une DES d'abord et ensuite on négocie

I Cas scindé à racines simples

thm Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec B scindé à racine simple

ie de la forme $B = \mu \prod_{i=0}^r X - \lambda_i$

¹ Fraction de polynômes $\frac{P(X)}{Q(X)}$

Alors :

$$\exists! (Q, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in K[X] \times K^r$$

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{x-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{x-\lambda_r}$$

De plus Q est le quotient dans la DES de A par B

ex

$$\frac{\overbrace{X^3}^A}{\underbrace{X^2-1}_B}$$

$$\text{On a } x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

qui est bien sans¹

D'après thm, on peut trouver $Q, \overbrace{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{racines}}$ tel que

$$\frac{X^3}{X^2-1} = Q + \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x+1}$$

Mieux $Q = ax + b$

$$\frac{X^3}{X^2-1} = \frac{(ax+b)(x^2-1) + \alpha_1(x+1) + \alpha_2(x-1)}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow X^3 = (ax+b)(x^2-1) + \alpha_1(x+1) + \alpha_2(x-1)$$

¹ Scindé à racines simples.

$$= ax^3 + bx^2 - ax - b + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x - \alpha_2$$

$$= ax^3 + bx^2 + (-a + \alpha_1 + \alpha_2)x - b$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^3 + bx^2 + (-a + \alpha_1 + \alpha_2)x - b + \alpha_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b=0 \\ -a + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -b + \alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ b = \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ??? \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 1/2 \end{cases}$$

remq On a $A = BQ + R$

$$\text{Donc } \frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{x-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{x-\lambda_r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B} - Q = \frac{A-BQ}{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{x-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_r}{x-\lambda_r}$$

Méthode efficace

1. On calcule Q par DE
2. Pour calculer les α_k , on multiplie par $x - \lambda_k$
puis on évalue en λ_k

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k} + Q + \frac{\alpha_1}{X - \lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{X - \lambda_{k-1}} + \dots +$$

$$\begin{array}{l} (X - \lambda_k) \downarrow \\ \frac{A}{\mu (X - \lambda_1) (X - \lambda_{k-1}) (X - \lambda_{k+1}) \dots (X - \lambda_r)} = \alpha_k + (X - \lambda_k) [\dots] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ll X = \lambda_k \gg \downarrow \\ \text{rem} = \alpha_k + 0 \end{array}$$

Sur l'exemple

$$\frac{X}{X^2 - 1} = Q + \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1}$$

$$X^3 = X^3 - X + X = (X^2 - 1) \cdot \underbrace{X}_{Q} + \underbrace{X}_{\deg < 2}$$

$$\ominus \begin{array}{r} X^3 \quad | \quad X^2 - 1 \\ X^3 - X \quad | \quad X \\ \hline \text{⊗} \end{array}$$

$$\frac{X^3}{X^2 - 1} = Q + \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1} \quad \downarrow \times (X - 1)$$

$$\frac{X^3}{X + 1} = \alpha + (X - 1) \left[Q + \frac{\alpha_2}{X + 1} \right]$$

$$\frac{1^3}{1 + 1} = \alpha + 0 \cdot [\dots] \quad \downarrow \ll X = 1 \gg$$

$$\text{i.e. } \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{X^3}{X^2 - 1} = Q + \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1} \quad \downarrow \times (X + 1)$$

$$\frac{X^3}{X - 1} = \alpha_2 + (X + 1) \left(Q + \frac{\alpha_1}{X - 1} \right) \quad \downarrow \ll X = -1 \gg$$

$$\frac{(-1)^3}{-1-1} = \alpha_2 + 0 \text{ i.e. } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Décomposition en éléments simples

II Cas scindé

eg

$$\frac{3x+2}{x^3-2x^2+x}$$

Factorisons le dénominateur.

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

Il est scindé, mais pas à racine simple, il a une racine double: 1.

Dans ce cas, la forme théorique de la DES est:

$$\frac{3x+2}{x^3-2x^2+x} = Q + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}$$

↑
= 0 car $\deg(3x+2) < \deg(x^3-2x^2+x)$

Pour α , rien ne change ; Pour γ , pareil:

$$x \left(\frac{3x+2}{(x-1)^2} = \alpha + x[\dots] \right) \quad (x-1) \left(\frac{3x+2}{x} = \gamma + (x-1)[\dots] \right)$$

$$x=0 \left(\alpha = 2 \right)$$

$$x=1 \left(\gamma = 5 \right)$$

Pour β , pb! (on divise par zéro)

par le tracuer:

Meth 1) On soustrait $\frac{\gamma}{(x-1)^2}$ (connu) à l'égalité initiale.

Meth 2) On reinjecte et on identifie.

Meth 3) On évalue en un réel $\notin \{0, 1\}$

Meth 4) On multiplie par X et $X \rightarrow +\infty$

$$\cdot X \left(\frac{3X+2}{(X-1)^2} = \alpha + \beta \frac{X}{X-1} + \gamma \frac{X}{(X-1)^2} \right)$$

$$X \rightarrow +\infty \rightarrow 0 = \alpha + \beta + 0$$

$$\text{de } \beta = -\alpha = -2.$$

thm Cas scindé

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tq B est scindé ie de la forme

$$B = \mu \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Alors $\exists!$ $(Q, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,m_r})$ tq

$$\frac{A}{B} = Q + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \lambda_i)^j}$$

Décomposition en éléments simples

III Cas sans facteur multiple

eg La forme théorique de la DES de $\frac{1}{X(X^2+1)(X^2+4)}$ est:

$$Q + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 1} + \frac{\delta X + \varepsilon}{X^2 + 4}$$

\uparrow
 $= 0$

Trouvons α

On multiplie par X : $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \alpha + X(\dots)$

On évalue en 0 $\frac{1}{4} = \alpha$

Pour $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ on peut

On multiplie par X puis faire $X \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \alpha + \frac{\beta X^2 + \gamma X}{X^2+1} + \frac{\delta X^2 + \varepsilon X}{X^2+4}$$

donc $0 = \alpha + \beta + \delta$

ie $\beta + \delta = -\frac{1}{4}$

↳ On évalue en 1.

$$\frac{1}{10} = \alpha + \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\delta + \varepsilon}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 10\alpha + 5\beta + 5\gamma + 2\delta + 2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 5\beta + 5\gamma + 2\delta + 2\varepsilon = -\frac{3}{2} \quad (\star)$$

On évalue en -1.

$$-\frac{1}{10} = -\alpha + \frac{-\beta + \gamma}{2} + \frac{-\delta + \varepsilon}{5}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -10\alpha - 5\beta + 5\gamma - 2\delta + 2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -5\beta + 5\gamma - 2\delta + 2\varepsilon = \frac{3}{2} \quad (\star\star)$$

$$(\star) + (\star\star) \text{ donne } 10\gamma + 4\varepsilon = 0$$

$$(\star) - (\star\star) \text{ donne } 10\beta + 4\delta = -3$$

↳ NEW: Utiliser la parité et l'unicité d'une DES

$$f(x) = \frac{1}{B(x)}$$

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{x} + \frac{-\beta x + \gamma}{x^2 + 1} + \frac{-\delta x + \varepsilon}{x^2 + 4}$$

$$= \frac{-\alpha}{x} + \frac{-\beta x - \gamma}{x^2 + 1} + \frac{-\delta x - \varepsilon}{x^2 + 4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\gamma \Rightarrow \gamma = 0 \\ \varepsilon = -\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\beta + 4\delta = -1 \\ 10\beta + 4\delta = -3 \end{cases}$$

par différence $-6\beta = 2$ ie $\beta = -\frac{1}{3}$

Réinjectons:

$$4\delta = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{12}$$

Meth 2 On utilise les racines complexes!

On multiplie par X^2+1 puis on évalue en i

$$\frac{1}{X(X^2+4)} = \beta X + \gamma + (X^2+1)(\dots)$$

$$\text{avec } X=i \quad \beta i + \gamma = \frac{1}{i(i^2+4)} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}$$

Deux complexes sont égaux ssi Re et Im sont égaux

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On multiplie par X^2+4 puis on évalue en $2i$

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \delta X + \varepsilon + (X^2+4)(\dots)$$

avec $X = 2i$

$$2\delta i + \varepsilon = \frac{1}{2i}(2i^2 + 1) = \frac{2}{6}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ 2\delta = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \delta = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Décomposition en éléments simples

IV Cas sans facteurs multiples

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ sans facteurs multiples ie

$$B = \mu \prod_{k=1}^r X - \lambda_k \prod_{k=1}^s X^2 + b_k X + c_k$$

Alors $\exists! (Q, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^{r+2s}$

$$\text{tg } \frac{A}{B} = Q + \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k} + \sum_{k=1}^s \frac{\beta_k X + \gamma_k}{X^2 + b_k X + c_k}$$

De plus $Q = \text{quo}(A, B)$

eg $\frac{1}{X(X^2+1)^2}$. forme thémique:

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \underbrace{Q}_{=0} + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2+1} + \frac{\delta X + \varepsilon}{(X^2+1)^2}$$

Trouvons α : on multiplie par X et on évalue en 0

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = \alpha + X(\dots)$$

$$\text{donc } \frac{1}{(0^2+1)^2} = \alpha = 1.$$

thm Cas général

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]^*$

Avec $B = \mu (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r} (X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_s X + c_s)^{n_s}$

$\exists! (Q, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,m_r}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,m_1}, \beta_{s,1}, \dots, \beta_{s,m_s}, \dots, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,m_1}, \dots, \gamma_{s,1}, \dots, \gamma_{s,m_s}),$

$$\frac{A}{B} = Q + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\beta_{ij} X + \gamma_{ij}}{(X^2 + b_i X + c_i)^j}$$

V Application. intégration des IR

Méthode 1. On la décompose en els simples

2. On utilise la linéarité

$$\int \frac{A}{B} = \int Q + \int \dots + \int \dots \dots$$

cf. poly.

Éléments simples:

- $Q(x)$: ez
- $\frac{\alpha}{X - \lambda}$: faisable
- $\frac{\alpha}{(X - \lambda)^m}$: ez
- $\frac{\alpha X + \beta}{aX^2 + bX + c}$: Mr Stank
i don't feel so good
- $\frac{\alpha X + \beta}{(aX^2 + bX + c)^n}$: faisable + r

$$\begin{aligned}
 \text{eg } \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
 &= x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}
 \end{aligned}$$

Calculons $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
 identité remarquable: $(x+\frac{1}{2})^2$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

Posons $t = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2 + 1}$$

Posons $\xi^2 = \frac{3}{4}t^2 \Leftrightarrow \xi = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{2\sqrt{3} d\xi}{\xi^2 + 1}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + 1}$$

Décomposition en éléments simples

(Erreur) $\frac{4}{3} \int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2 + 1} \rightarrow \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2 + 1} = \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$

Posons $z = \frac{2t}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z^2 + 1}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} z + \mathbb{R}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2t}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

$$= x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= x \mapsto \frac{1}{2} \ln |x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathbb{R}$$

