Développement limités

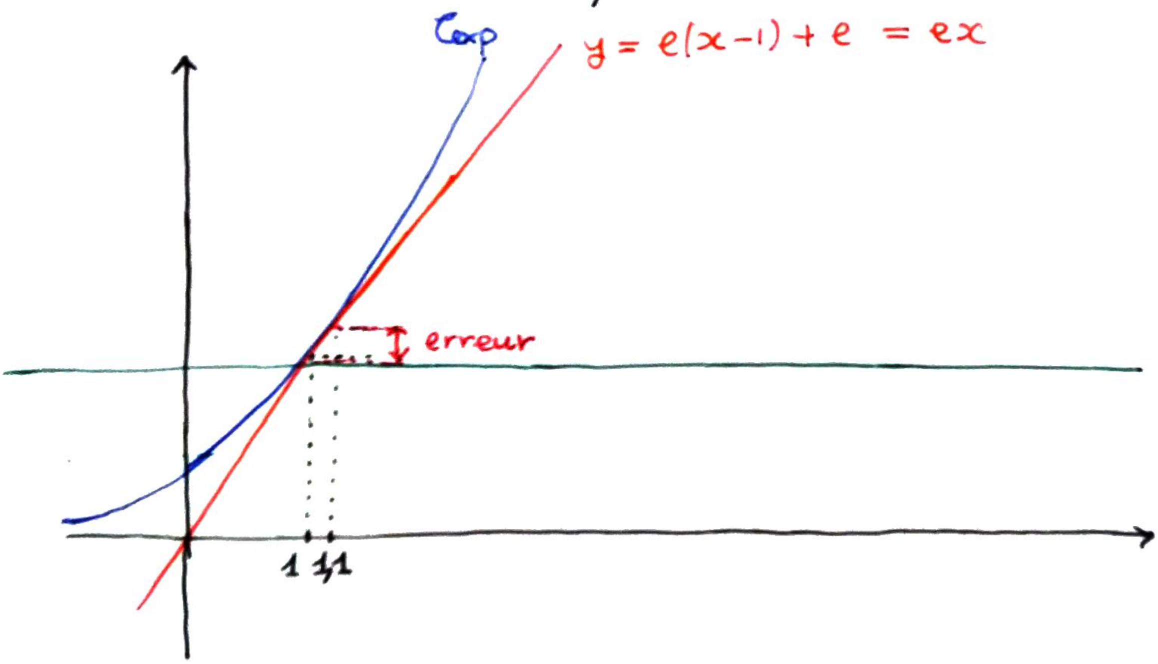
<u>ctx</u> $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ a \in I \\ f \in \mathbb{R}^I \end{cases}$

I $DL_1(a)$ et le lien avec la dérivabilité

1 Approximation linéaire

<u>eg</u> $x = 1,1$, donner e^x (une approx)

$$x \approx 1 \Rightarrow e^x \approx e^1 \approx 2,72$$



Meth 1 J'approche par la tangeante

$$e^{1,1} \approx e \cdot 1,1 \approx 2,99$$

<u>idée</u>

La tangeante en a est la "meilleure droite" qui approche $\mathcal{C}_f$ au voisinnage

2 Reformulation de la dérivée

rappel

f est dérivable de dérivée $f'(a) \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+hf'(a))}{h} = 0$$

$\Leftrightarrow$ la fonction $\varepsilon = h \mapsto \dfrac{f(a+h)-(f(a)+hf'(a))}{h}$

est de limite nulle en 0.

thm

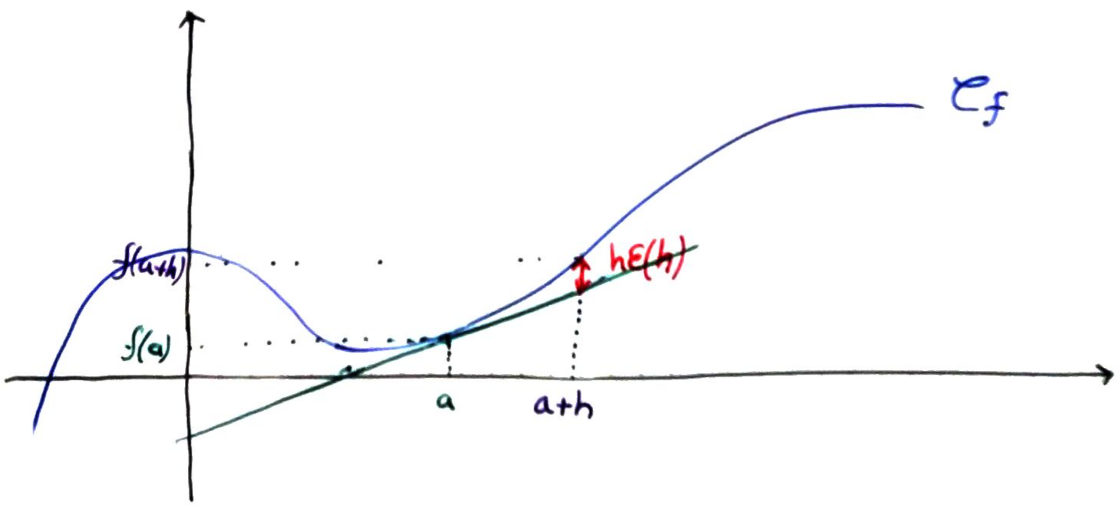
f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$

$\Leftrightarrow$ il existe une fonction ε de limite nulle en 0

telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$

remq *Interprétation géométrique*

Si on approche $f(a+h)$ par $f(a)+hf'(a)$ l'erreur commise tend vers 0 infiniment plus vite que h (l'erreur c'est $h\varepsilon(h)$)



3 DL à l'ordre 1 en a

def

On appelle $DL_1(a)$ de f une expression de la forme

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + h\varepsilon(h) \quad \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$$

Le théorème précédent explicite comment trouver des $DL_1(a)$ de fonctions dérivables

eg

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet\ e^{1+h} = e^1 + e^1 h + h\varepsilon(h) && \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0\\
&\bullet\ e^h = e^0 + e^0 h + h\varepsilon(h) = 1 + h + h\varepsilon(h) && \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0\\
&\bullet\ \sin h = \sin 0 + \sin' 0\, h + h\varepsilon(h) = h + h\varepsilon(h) && \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0\\
&\bullet\ \ln(1+h) = \ln 1 + \ln' 1\, h + h\varepsilon(h) = h + h\varepsilon(h) && \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0
\end{aligned}\right\} \ \varepsilon \text{ n'est pas la même à chaque fois.}$$

Les DLs en maths servent à calculer des limites

eg Limite de $\left(1+\frac{1}{id}\right)^{id}$ en $+\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Posons $h = \frac{1}{x}$. $\quad x \longrightarrow +\infty \iff h \longrightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h + h\varepsilon(h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 + \varepsilon(h)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $\left(1+\frac{1}{id}\right)^{id} \xrightarrow[\infty]{} e^1 = e$ par continuité de exp en 1

Les DL à l'ordre 1 peuvent ne pas suffire.

eg

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} =$$

à l'ordre 1

$$\frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{1 + h + h\varepsilon(h) - 1 - h}{h^2}$$

$$= \frac{h\varepsilon(h)}{h^2}$$

$$= \frac{\varepsilon(h)}{h}$$

Le DL_1 ne suffit pas à lever l'indétermination

II DL_n et un example

def $DL_n(a)$ de f

Une expression de la forme

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

thm Unicité d'un $DL_n(a)$

Un $DL_n(a)$ est toujours unique.

remq

Si $m < n$, on obtient le $DL_m(a)$ en tronquant le $DL_n(a)$ après le $m^{\text{ième}}$ terme.

remq

Quitte à changer f en $t \mapsto f(a+t)$

On peut supposer qu'on $a = 0$

On suppose cela dans toute la suite

2 DLn géométrique

rappel

$$\sum_{k=0}^{n} h^k = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$$

pour $|h| < 1$

Autrement dit, $$\frac{1}{1-h} = 1+h+\cdots+h^n + \frac{h^{n+1}}{1-h}$$
$$= 1+h+\cdots+h^n\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon = \frac{id}{1-id} \xrightarrow[0]{} 0$

app.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1-h} - 1 - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h+h^2+h^2\varepsilon(h) - 1 - h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 + \varepsilon(h)$$

$$= 1$$

III Méthodes de calcul des DL

1 Formule de Taylor-Young

notatn $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}), f^{(n)} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})\}$

thm TY (~~thankyouthg~~) Taylor-Young)

Supp que f soit $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0. Alors f a une $DL_n(0)$ qui est :

$$f(h) = h^n \varepsilon(h) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) h^k \quad \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$$

app $DL_n(0)$ de exp

$$e^h = h^n \varepsilon(h) + \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}$$

app

- $$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{h} + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) - \cancel{1} - \cancel{h}}{h^2}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} + \varepsilon(h)$$
$$= \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - \frac{1}{1-h}}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} ?$$

$$\frac{e^h - \frac{1}{1-h}}{h^2} = \frac{\left(1+h+\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h)\right) - \left(1+h+h^2+h^2\varepsilon_2(h)\right)}{h}$$
$$= \frac{-\frac{h^2}{2} + h^2(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))}{h^2}$$
$$= -\frac{1}{2} + \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)$$
$$\xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

2 Changement de variable monomial

thm

Si f a pour $DL_n(0)$

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$$

alors $t \mapsto f(\lambda t^k)$ a pour $DL_n(0)$

$$f(\lambda t^k) = \alpha_0 + \lambda \alpha_1 t + \cdots + \lambda^n \alpha_n t^{nk} + t^{nk} \tilde{\varepsilon}(t) \quad \text{avec } \tilde{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$$

app

- $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+id}$

$$\frac{1}{id+1} = \frac{1}{id-(-id)}$$
$$= 1 + (-id) + (-id^2) + \cdots + (-id)^n + id^n \tilde{\varepsilon}$$
$$= 1 - id + id^2 - id^3 + id^4 - \cdots + (-1)^n id^n + id^n \tilde{\varepsilon}$$

Meth 2 $\frac{1}{1+id} = (1+id)^{-1}$

$$= 1 + (-1) id + \binom{-1}{2} id^2 + \cdots + \binom{-1}{k} id^k + \cdots + \binom{-1}{n} id^n + id^n \tilde{\varepsilon}$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = \frac{(-1)^k \cancel{k!}}{\cancel{k!}} = (-1)^k$$

$$\frac{1}{1+id} = 1 - id + \cdots + (-1)^k id^k + \cdots + (-1)^n id^n + id^n \tilde{\varepsilon}$$

- $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+id^2}$

$$\frac{1}{id+1} = \frac{1}{id-(-id^2)} = 1 + (-id^2) + (-id^2)^2 + \cdots + (-id^2)^n + id^{2n} \varepsilon_1$$
$$= 1 - id^2 + id^4 + \cdots + (-1)^n id^2 + id^{2n} \varepsilon_1$$

où $\varepsilon_1 \xrightarrow[0]{} 0$

3 Intégrer / dérivation d'un DL

thm *Intégration d'un DL*

Si f' a pour $DL_n(0)$

$$f' = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n \mathrm{Id}^n + \mathrm{Id}^n \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$$

Alors f a pour $DL_{n+1}(0)$

$$f = f(0) + \alpha_0 \mathrm{Id} + \frac{\alpha_1}{2}\mathrm{Id}^2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}\alpha^{n+1} + \mathrm{Id}^{n+1}\tilde{\varepsilon} \quad \text{où } \tilde{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$$

app

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{d}{dx}\left(\ln(1+x)\right) \\ \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\arctan x\right) \end{cases}$$

Donc un DL_{n+1} de $\ln(1+x)$ est :

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

$\operatorname{atan} 0 = 0$ donc un DL_{2n+1} de arctan est

$$\operatorname{atan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\tilde{\varepsilon}(x)$$

avec $\tilde{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$

thm Supp que f est $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de 0
Alors on peut dériver le $DL_{n+1}(0)$ de f

ie si $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} \varepsilon(x)$ où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

alors

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_1 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1} + (n+1)\alpha_{n+1} x^n + x^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

où $\tilde{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$

app

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right) \qquad x \longmapsto \frac{-1}{1+x} \text{ est } \mathcal{C}^{n+1}$$

donc on peut dériver son $DL_{n+1}(0)$

$$\frac{-1}{1+x} = -1 + x - x^2 + \cdot \quad + (-1)^{n+1} x^n + (-1)^n x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

d/dx

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + n(-1)^{n-1} x^{n-1} + (n+1)(-1)^n x^n + x^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

4 DL d'une combinaison linéaire

thm

Le $DL_n(0)$ d'une CL est la CL des $DL_n(0)$

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0 \\ g(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k \tilde{\varepsilon}(x) \text{ où } \tilde{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) x^k + x^n \hat{\varepsilon}(x) \text{ où } \hat{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$$

eg $ch = \dfrac{\exp + e^{-\mathrm{id}}}{2} = \frac{1}{2}\exp + \frac{1}{2} e^{-\mathrm{id}}$

On fait un DL à l'ordre $2n$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\tilde{\varepsilon}(x)$$

Il reste tout les pairs ~~deux~~ fois, divisé par deux.

par combinaison linéaire

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\hat{\varepsilon}(x)$$

ie $ch\, x = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n}\hat{\varepsilon}(x)$

C'est la partie paire du DL de exp

de même $sh\, x = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1}\check{\varepsilon}(x)$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\tilde{\varepsilon}(x)$$

<u>par CL</u> :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n}\hat{\varepsilon}(x)$$

5 DL d'une produit

thm Le $DL_n(0)$ d'un produit s'obtient en tronquant le produit des $DL_n(0)$

eg $DL_5(0)$ de $\cos x \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \tilde{\varepsilon}(x)$$

Donc

façons d'avoir du x^3

x^5

$$\cos x \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\tilde{\varepsilon}(x)\right)$$

façons d'avoir du x^1

$$= x + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)x^5 + x^5 \underbrace{\hat{\varepsilon}(x)}_{\text{les autres termes vont là-dedans}}$$

⚠ Il faut multiplier 2 DL à l'ordre 5 pour avoir un ordre 5

or
$$\begin{cases} -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1+10+5}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Meth 2 $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin x$

$$= \frac{1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^5}{120} + x^5 \check{\varepsilon}(x)\right)$$
$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon'(x)$$

6 DL d'une composée

thm

Si $g \longrightarrow 0$ alors

le $DL_n(0)$ de $f \circ g$ s'obtient en tronquant l'expr. obtenue en composant les DL.

eg

1 $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$

On a bien $\sin \underset{0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$
\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + \sin^3 x\,\varepsilon(x) \\
&= \boxed{1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right.} + x^3\tilde{\varepsilon}(x)\Big) + \boxed{\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\tilde{\varepsilon}(x)\right)^2}{2}} + \boxed{\frac{\left(x + x\hat{\varepsilon}(x)\right)^3}{6}} + \left(x + x\hat{\varepsilon}(x)\right)^3 \varepsilon(x) \\
&= \boxed{1 + x - \frac{x^3}{6}} + \boxed{\frac{x^2}{2}} + \boxed{\frac{x^3}{6}} + x^3\check{\varepsilon}(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\check{\varepsilon}(x)
\end{aligned}
$$

2 $DL_3(0)$ de $\sin(e^x)$

⚠ $\exp \not\to 0$ $\quad \sin(e^x - 1 + 1) = \sin(e^x - 1)\cos 1 + \cos(e^x - 1)\sin 1$

Notons $X = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$

$X \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc

$$\sin(e^x - 1) = \sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + X^3\varepsilon_2(x)$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_3(x)$$

et $\cos(e^x - 1) = \cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + X^3\varepsilon_4(x)$
$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x^3 + x^3\varepsilon_5(x)) + x^3\varepsilon_6(x)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_7(x)$$

Conclusion

$$\sin(e^x) = \cos 1 + \sin 1 \, x + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2} x^2 - \frac{\sin 1}{2} x^3 + x^3\varepsilon_8(x)$$

$$X^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)$$
$$= x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + x^3\varepsilon_5(x)$$

$\square$

Développements limités usuels en 0

I Variantes sur la somme des termes d'une suite géométrique

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right)+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) = \left(-\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{x^k}{k}\right)+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right)+x^n\varepsilon(x)$$

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+1}\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right)+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

II Variantes sur l'exponentielle

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)+x^n\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)+x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{sh}(x) = x+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)+x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

III Puissances de $(1+x)$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k\right)+x^n\varepsilon(x) \qquad \text{où l'on note } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Formulaire disponible à l'adresse suivante : http://mpsi.daudet.free.fr/.

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.