Déterminants

new

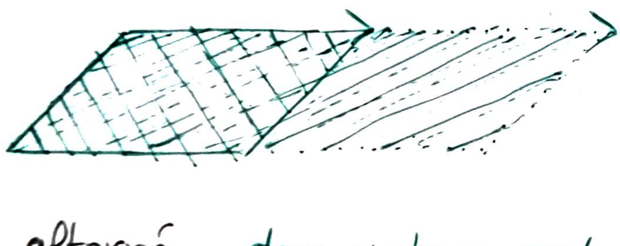
- les démos
- det d'un endomorphisme
- formule de la comatrice
- $\det(AB) = \det A \det B$

conseil d'Arnold

det est l'hypervolume (algébrique, orienté) du parallélotope porté par les n vecteurs.

propriétés attendues d'un hypervolume

1. n-linéaire (linéaire par rapport à chaque argument)



2. alterné deux vecteurs sont $=$ $\Rightarrow$ hypervolume $= 0$

notn

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E est un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie

I Formes p-linéaires

1 Définition

def formes p-linéaires

$$\text{“}\underbrace{\mathcal{L}_p}\text{”}(E^p, \mathbb{K})$$

par rapport à chacun de ses p vecteurs

ie $\Big\{ f \in \mathbb{K}^{E^p},\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \in E^{p-1},$
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (v, w) \in E^2,$
$f(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda v + \mu w, u_{i+1}, \dots, u_p) =$
$\lambda f(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_p) + \mu f(u_1, \dots, u_{i-1}, \dots, w, u_{i+1}, \dots, u_p) \Big\}$

remq

$p=1$ linéaire
$p=2$ bilinéaire
$p=3$ trilinéaire

thm ensemble des formes p-linéaires

$\mathcal{F}_p(E)$ sev $\mathbb{K}^{E^p}$

Lemme fondamental

1. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base E
et $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que

$$\begin{cases} x_1 = x_{11}\varepsilon_1 + \dots + x_{n1}\varepsilon_n & \text{ie } \underset{\mathcal{B}}{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ x_p = x_{1p}\varepsilon_1 + \dots + x_{np}\varepsilon_n & \text{ie } \underset{\mathcal{B}}{x_p} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors :

$$\forall f \in \mathcal{F}_p(E), \quad f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p})$$

2. En particulier, $\dim \mathcal{F}_p(E) = n^p$ et une base est

$$\left((x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, \delta_{(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p)} \right)_{(j_1, \dots, j_p) \in [\![1,n]\!]^p}$$

$$= \left((x_1, \dots, x_p) \mapsto x_{j_1 1} \cdots x_{j_p p} \right)_{(j_1, \dots, j_p) \in [\![1,n]\!]^p}$$

dem

1. Soit $f \in \mathcal{F}_p(E)$.

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1} \varepsilon_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2 2} \varepsilon_{i_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} x_{i_p p} \varepsilon_{i_p} \right)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{p} \sum_{i_j=1}^{n} x_{i_j j} \right) f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}) \quad \text{par } p\text{-linéarité}$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p})$$

2. ok

2 Formes p-linéaires symétriques

def $f \in \mathcal{F}_p(E)$ est dite symétrique

$$\forall u_1,\dots,u_p,\ \forall i \neq j,\ f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)$$
$$= f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

prop

$f \in \mathcal{F}_p(E)$ symétrique $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_p,\ f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = f(u_1,\dots,u_p)$

dem

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sigma = \tau_{ij}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tout σ se décompose en $\circ$ de transpositions.

3 Formes p-linéaires antisymétriques

def $f \in \mathcal{F}_p(E)$ antisymétrique

$$\forall u_1,\dots,u_p,\ \forall i \neq j,\ f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)$$
$$= -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

prop $f \in \mathcal{F}_p(E)$ antisymétrique

$$\forall \sigma \in S_p,\ f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1,\dots,u_p)$$

dem

$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \sigma,\ \sigma = \bigcirc_{k=1}^{r} \tau_{i_k j_k}$

$$f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{par def,} \\ \tau_{i_k j_k}}} \times \underbrace{(-1)}_{\tau_{i_{k-1} j_{k-1}}} \times \dots \times \underbrace{(-1)}_{\tau_{i_p j_p}} f(u_1,\dots,u_p)$$

$$= (-1)^k f(u_1,\dots,u_p)$$

$$= \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\text{def. de } \varepsilon} f(u_1,\dots,u_p)$$

4 Formes p-linéaires alternées

thm $f \in \mathcal{F}_p(E)$ est alternée

f est antisymétrique

dem

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose f antisymétrique

$$f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,u_p) \text{ par antisym}$$

donc $2f(u_1,\dots,u,\dots,u,\dots,u_p) = 0$ et $2 \neq 0$ donc ok.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f alternée

Soient $u_1, .., u_n \in E$

$$f(u_1, \dots, u_i+u_j, \dots, u_j+u_i, \dots, u_p) = 0$$

ie $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$

$+ f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) + \underbrace{f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_j, \dots, u_p)}_{0} = 0$

ie $f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) = - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p)$

__notn__ espace des formes p-linéaires alternées sur E

$$\mathcal{A}_p(E)$$

4 Description de $\mathcal{A}_n(E)$

On sait que le déterminant ("l'hypervolume") doit appartenir à $\mathcal{A}_n(E)$

Procédons par A-S

__Analyse__ candidat $f \in \mathcal{A}_n(E)$

Posons une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E

Pour $x_1, .., x_n \in E$, $\forall j \quad \underset{\mathcal{B}}{x_j} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$,

$$f(x_1,..,x_n) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,n]\!]^n} x_{i_1 1}\cdots x_{i_n n}\, f(\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_n})$$ (lemme fonda. avec $p=n$)

Dans cette somme il y a n^n termes mais tous les termes pour lesquels on a au moins deux i_k égaux sont nuls

Les seuls termes potentiellement non-nuls sont ceux pour lesquels tout les i_k sont différents ie $k \mapsto i_k \in$ 

ie $k \mapsto i_k \in$  par égalité des cardinaux

ie $k \mapsto i_k \in S_n$

Donc $$f(x_1,..,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n}\, f(\varepsilon_{\sigma(1)},\dots,\varepsilon_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1}\; x_{\sigma(n),n}\, \underbrace{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}_{\in \mathbb{K}}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n}$$

pour un certain λ dans $\mathbb{K}$

<u>Synthèse</u> Testons nos candidats

Comme $\mathcal{A}_n(E)$ et un sev (de $\mathbb{K}^{E^n}$), il suffit de mq

$$\phi : (x_1,..,x_n) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n} \in \mathcal{A}_n(E).$$

- p-linéarité

Soit $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\phi(x_1, \dots, \lambda y + \mu z, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda y + \mu z)_{\sigma(i),i} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda y_{\sigma(i),i} + \mu z_{\sigma(i),i}) \cdots x_{\sigma(n),n}$$

par linéarité de $!_{i,B}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} + \mu \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

par distributivité

$$= \lambda \phi(x_1, \ , y, \ , x_n) + \mu \phi(x_1, \ , z, \ , x_n)$$

- caractère alterné

Mq ϕ antisym ie $\forall \gamma \in S_n, \phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \varepsilon(\gamma) \phi(x_1, \dots, x_n)$

Soit $\gamma \in S_n$.

$$\phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),\gamma(1)} \cdots x_{\sigma(n),\gamma(n)}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),\gamma(i)}$$

or $\gamma \in \mathfrak{S}(\llbracket 1,n \rrbracket, \llbracket 1,n \rrbracket)$.

On a $\gamma(i) =: j$ ie $i =: \gamma^{-1}(j)$. $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$ ie $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$.

On change donc d'indice du $\prod$:

$$\phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(\gamma^{-1}(j)),j}$$

Or $\begin{cases} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \sigma \circ \gamma^{-1} \\ \delta \circ \gamma \mapsfrom \delta \end{cases} \in$

Donc $\delta := \sigma \circ \gamma^{-1}$ ie $\sigma = \delta \circ \gamma$

$\sigma \in S_n$ ie $\delta \in S_n$

Par changement de variable :

$$= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta \circ \gamma) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j}$$

$$= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta)\varepsilon(\gamma) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j} \quad \text{car } \varepsilon \text{ un mdg.}$$

$$= \varepsilon(\gamma) \underbrace{\sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j}}_{\phi(x_1, \quad , x_n)}$$

thm

$\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle

dem

On vient de voir que $\mathcal{A}_n(E) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \right\}$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda \phi \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\phi)$$

Reste à voir $\phi \neq 0$. Or $\phi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{n} e_{\sigma(i),i}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),i}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \, \delta_{\sigma, id}$$

$$= \varepsilon(id)$$

$$= 1$$

$$\neq 0$$

[suite en LATEX]