Fonctions continues

Continuité

Exercice 1. $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$...

Montrer que, si f et g sont continues, alors $|f|$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ le sont aussi.

Indication pour **une** *façon de faire : trouver une formule pour* $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$ *à base de valeurs absolues.*
Rappel : $|f| = \sup(f, -f)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Corollaires du TVI

Exercice 3. *Un polynôme*

Combien le polynôme $X^4 - 3X^3 + 4X - 1$ a-t-il de racines réelles ?

Exercice 4. *Une involution*

Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telles que $f \circ f = id_{\mathbb{R}_+}$.

Exercice 5. *"Racine carrée" continue d'une fonction affine*

Soit $a \notin \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On note $\varphi = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + b = x \mapsto ax + b$.

On souhaite déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ f = \varphi$.

1. Montrer que f est injective. Qu'en déduire ?
2. Montrer qu'il n'y a pas de solution pour $a < 0$.

Dans la suite on suppose $a > 0$.

3. Montrer qu'on a $f' \circ \varphi = f'$.
4. En déduire que f' est constante (traiter deux cas : $0 < a < 1$ puis $a > 1$).
5. Conclure.

Exercice 6. *Points fixes (à savoir refaire)*

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 7. On s'intéresse dans cet exercice à la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

On considèrera également les différentes fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_a(0) = a$.

Ainsi, on a $f_0 = f$.

1. a. Montrer que f est PVI, c'est-à-dire que l'image directe par f d'un intervalle est toujours un intervalle.
   Indication : distinguer deux types d'intervalles, ceux qui comprennnent 0 *et les autres.*
   b. Sans démonstration (donner juste l'idée), donner une CNS sur a pour que f_a soit PVI.
2. a. Montrer que f est discontinue.
   On a ainsi montré que la "réciproque du TVI" est fausse.
   b. Plus généralement, que dire de la continuité d'une fonction f_a ?
3. L'ensemble des fonctions PVI forme-t-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$?

$\boxed{5/5}$ Les solutions sont affines donc de la forme $\alpha\,\mathrm{id} + \beta$

Testons nos candidats : $\alpha\,\mathrm{id}+\beta$ est solution

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(\alpha x+\beta)+\beta = ax+b$$

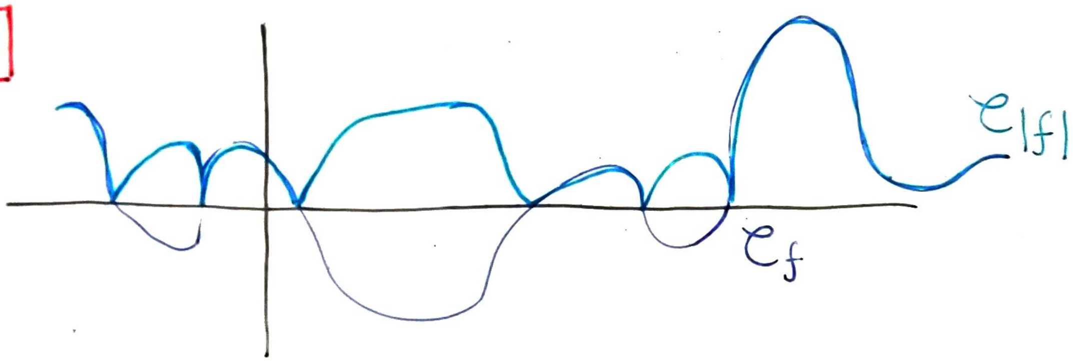
$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha^2 x + (\alpha\beta+\beta) = ax+b$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = a \\ \alpha\beta+\beta = b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{a} \\ \beta = \dfrac{b}{1\pm\sqrt{a}} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \sqrt{a}\,\mathrm{id} + \frac{b}{1+\sqrt{a}},\ -\sqrt{a}\,\mathrm{id} + \frac{b}{1-\sqrt{a}} \right\}$$

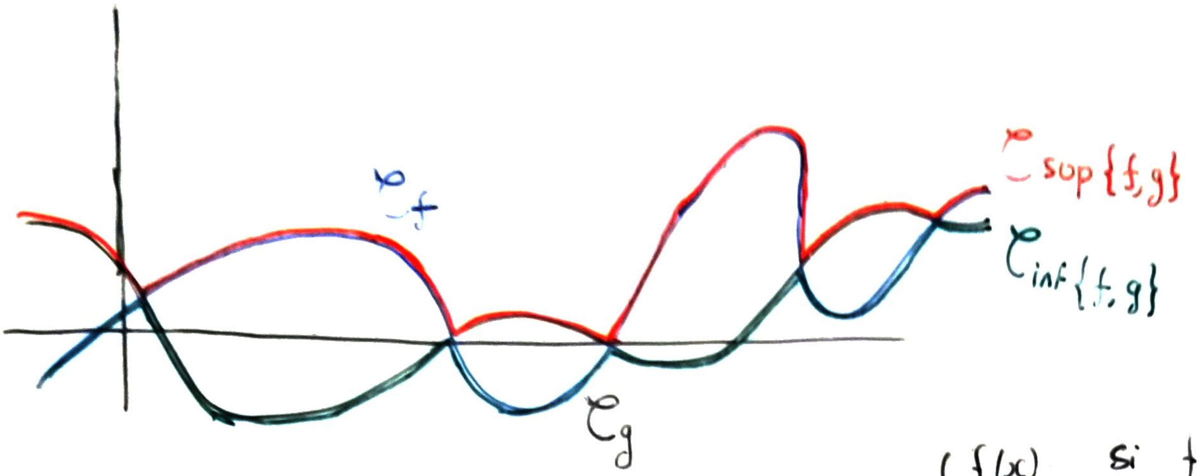
$\boxed{1}$



$$|f| = |\mathrm{id}| \circ f \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}$$

$\mathbb{R}^I$ est partiellement ordonné

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$$



$$\sup\{f,g\} := x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} = x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

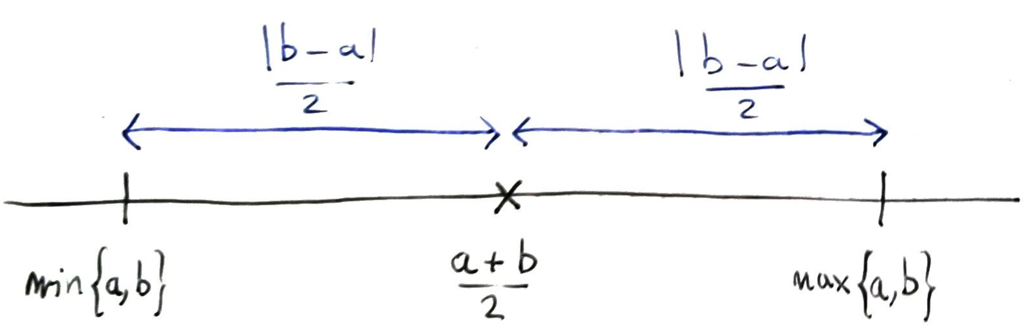
$$\inf\{f,g\} := x \mapsto \min\{f(x), g(x)\} = x \mapsto \begin{cases} f(x) \\ g(x) \end{cases}$$

Soit $x \in$

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $$\frac{|f(x)-g(x)| + f(x) + g(x)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $$\sup\{f,g\}(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$



d'où $\sup\{f,g\} \in \mathcal{C}$ par thm généraux

Idem pour $\inf\{f, g\}$ avec $-|f(x)-g(x)|$ à la place

$\boxed{2}$

- $f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{|x-a| < \eta}_{x \in]a-\eta, a+\eta[} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(a)| < \varepsilon}_{f(x) \in D_o(f(a), \varepsilon)}$

- U ouvert de $\mathbb{C} \Leftrightarrow \forall u \in U, \exists \varepsilon > 0, \underbrace{\forall z \in \mathbb{C}, |z-u| < \varepsilon \Rightarrow z \in U}_{D_o(u, \varepsilon) \subset U}$

- $x \in f^{\rightarrow}(U) \Leftrightarrow f(x) \in U$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f continue

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. Mq $f^{\leftarrow}(U)$ est ouverte.
Soit $a \in f^{\leftarrow}(U)$ ie $f(a) \in U$

U est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tq $D_o(f(a), \varepsilon) \subset U$
$f \in \mathcal{C}$, donc il existe $\eta > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, x \in]a-\eta, a+\eta[$
$\Rightarrow f(x) \in D_o(f(a), \varepsilon)$

Mq $]a-\eta, a+\eta[\subset f^{\rightarrow}(U)$. Soit $x \in]a-\eta, a+\eta[$.

On a vu que $f(x) \in D_o(f(a), \varepsilon) \subset U$ donc $f(x) \in U$
donc $x \in f^{\leftarrow}(U)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\forall U \in Ouv(\mathbb{C})$, $f^{\leftarrow}(U) \in Ouv(\mathbb{R})$

Mq $f \in \mathcal{C}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

$D_o(f(a), \varepsilon) \in Ouv(\mathbb{C})$

Par hypothèse $f^{\leftarrow}(D_o(f(a), \varepsilon)) \in Ouv(\mathbb{R})$

ie $\forall x \in f^{\leftarrow}(D_o(f(a), \varepsilon))$, $\exists \eta > 0$, $]a-\eta, a+\eta[\subset f^{\leftarrow}(D_o(f(a), \varepsilon))$

En particulier pour $x = a \in f^{\leftarrow}(D_o(f(a), \varepsilon))$
car $f(a) \in D_o(f(a), \varepsilon)$ on obtient
$\eta > 0$ tq $]a-\eta, a+\eta[\subset f^{\leftarrow}(D_o(f(a), \varepsilon))$
ie tq $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \in D_o(f(a), \varepsilon)$
ie tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

EXMCONT

$\boxed{3}$

$$P(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 + 4(-2) - 1 = 16 + 24 - 8 - 1$$
$$= 31$$

$$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 4(-1) - 1 = 1 + 3 - 4 - 1$$
$$= -1$$

$P \in \mathcal{C}([-2, -1], \mathbb{R})$ par th généraux

et $0 \in [-1, 31]$

donc d'après le TVI, P a une racine $\alpha \in [-2, -1]$

$\begin{cases} \text{On a } P(1) = 1 \text{ et } P(-1) = -1 \\ P \in \mathcal{C} \end{cases}$

d'après le TVI,

il existe $\beta \in]-1, 1[$ tq $P(\beta) = 0$

On a $\begin{cases} P(2) = -1 \text{ et } P(1) = 1 \\ P \in \mathcal{C} \end{cases}$

d'après le TVI

il existe $\gamma \in]1, 2[$, $P(\gamma) = 0$

$P(2) = -1$. $\quad P(x) = x^4\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) \xrightarrow[\infty]{} \infty$

$P \in \mathcal{C}([2, +\infty[, \mathbb{R})$ par th gén.

D'après le TVI sur un ouvert,

P a une racine $\delta \in [2, +\infty[$

Ainsi: P a au moins 4 racines

or $\deg P = 4$

donc P a au plus 4 racines

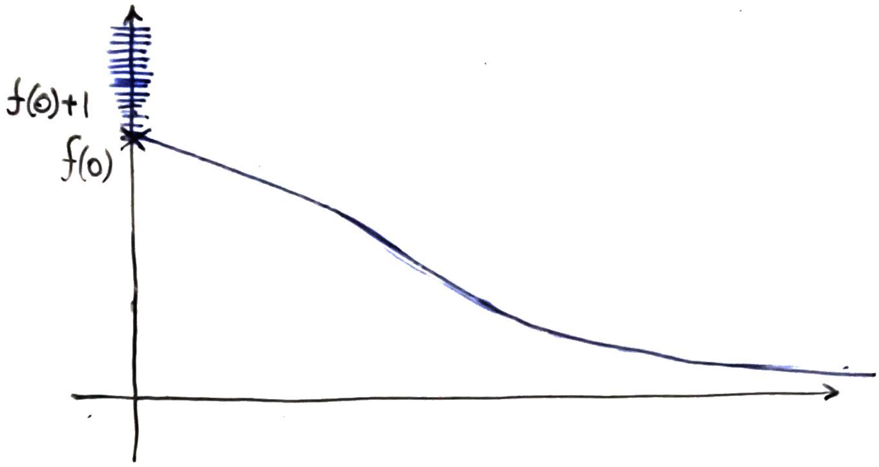
$4 \leq \#\text{racines} \leq 4$ ie $\#\text{racines} = 4$ par Ⓐ de $\geqslant$

$\boxed{4}$

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \\ f \circ f = id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{C} \\ f \circ f = id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \in \ominus\oplus \\ f \in \mathcal{C} \end{cases} \Rightarrow f \in \nearrow\!\!\searrow$$

Traitons deux cas

1^er cas ($f \in \searrow$):



Soit $y \in]f(0), +\infty[$. Par l'absurde.
Supp qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f(\alpha) = y$
On a $f(\alpha) = y > f(0) \Rightarrow \alpha < 0$ car $f \in \searrow$

imp

Donc y n'a pas d'antécédent donc $f \notin \ominus\oplus$ donc pas de solutions.

2^e cas ($f \in \nearrow$):

Mq $f = id$ ie $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x$ par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$.

1^er CYKA ($f(x) < x$):

$$f(x) < x \quad \text{ie} \quad f(f(x)) < f(x) \quad \text{car } f \in \nearrow$$

$$\text{ie} \quad x < f(x) \quad \text{imp}$$

2e CYKA ($f(x) > x$):

$f(x) > x$ ie $f(f(x)) > f(x)$ car $f \in \nearrow$.

ie $x > f(x)$ imp

Concl

$$S = \underbrace{\Big(\underbrace{\{id\}}_{\text{hyp}} \cup \overset{1^e\text{CYKA}}{\widehat{\emptyset}} \cup \underset{2^e\text{CYKA}}{\underset{\smile}{\emptyset}}\Big)}_{\text{cas 2}} \cup \overset{\text{cas 1}}{\widehat{\emptyset}} = \{id\}$$

$\boxed{5}$ Cet exo a un lien avec "déterminer $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \circ (a\,id_{\mathbb{R}} + b) = f\}$"
où $a \notin \{0, 1\}$

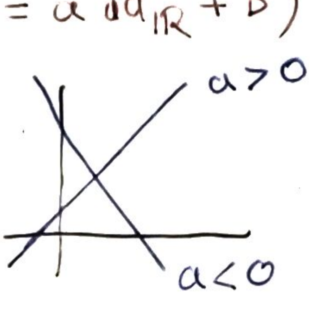
ex (TD 3) $f = f \circ \left(\frac{id}{2} + 1\right)$

ex (lundi) $f = f \circ (2id)$

ex $\begin{pmatrix}\text{CCINP} \\ 43\end{pmatrix}$ $f = f \circ \arctan$

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \circ f = \varphi \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f = a\,id_{\mathbb{R}} + b) \end{cases}$$

$\boxed{5/1}$ $f \circ f = \varphi = a \cdot id_{\mathbb{R}} + b$



$a \neq 0$ donc φ est bijective

[$f \circ g \in$ [illegible] $\Leftrightarrow g \in$ [illegible]

$$\left| f \circ g \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in \mathcal{S} \right.$$

Ici : $f \circ f \in \mathcal{B} \Rightarrow \underbrace{f}\circ\underbrace{f} \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{f} \in \mathcal{I} \\ \underbrace{f} \in \mathcal{S} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{S} = \mathcal{B}$$

Or $f \in \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}$ On a $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{I} \subset \nearrow\searrow$

$$\Rightarrow f \in \nearrow\searrow$$

$\boxed{5/2}$ $f \circ f$ est la composée de deux fonctions $\nearrow\searrow$ de même monotonie donc $f \circ f = \varphi \in \nearrow$

Donc $a > 0$

ie $a < 0 \Rightarrow$ Solutions $= \emptyset$

$\boxed{5/3}$ Supposons $a > 0$. Mq $f' \circ \varphi = f'$

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f' \in \mathcal{C} \\ \varphi \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{D} \end{cases}$$

$$f' \circ (f' \circ f) = a$$

$$f \circ \varphi = f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \varphi \circ f$$

$$f' \circ (\varphi' \circ f) = \varphi' \circ (f' \circ \varphi) \Leftrightarrow a(f' \circ \varphi) = a f' \Leftrightarrow f' \circ \varphi = f'$$

EXM CONT

$\boxed{5/4}$ On pose $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas ($a \in]0, 1[$) :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b \end{cases}$$

u est une suite arithmético-géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = x a^n + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$= a^n\left(x + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

$$a \in]0, 1[\Rightarrow u_n \longrightarrow \frac{-b}{a-1}$$

Par récurrence immédiate,

$$f'(u_n) = f'(a u_{n-1} + b)$$

$$= f'(u_{n-1})$$

$$= f'(a u_{n-2} + b)$$

$$= f'(u_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$= f'(u_0)$$

$$= f'(x)$$

$$f' \circ u \xrightarrow[\infty]{} f'\left(\frac{-b}{a-1}\right) \text{ par CSC car } f \in \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}$$

$$\overset{\shortparallel}{f'(x)} \longrightarrow f'(x) \text{ par ! de lim, } f'(x) = f'\left(\frac{-b}{a-1}\right)$$

donc f' est constante

donc f est affine.

<u>2e cas</u> $(a > 1)$:

Soit $X \in \mathbb{R}$.

$$X = ax+b \Leftrightarrow \frac{1}{a}X - \frac{b}{a} \qquad \text{car } a > 1 \Rightarrow a \neq 0$$

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(ax+b) = f'(x)$

donc $\forall X \in \mathbb{R},\ f'(X) = f'\left(\frac{1}{a}X + \frac{b}{a}\right)$

On pose $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{a}u_n - \frac{b}{a} \end{cases}$$

C'est une suite arithmético-géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = X\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{-b}{a}\right)\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1}{\frac{1}{a} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^n\left(X + \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{1}{a} - 1}\right) + \frac{\frac{b}{a}}{\frac{1}{a} - 1}$$

$\frac{1}{a} \in]0, 1[$ donc $u_n \longrightarrow \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{1}{a} - 1} = \dfrac{-b}{a-b}$

Par raisonnement analogue, f est affine

$\boxed{5/5}$ Les solutions sont affines donc de la forme $\alpha\,\mathrm{id}+\beta$

Testons nos candidats : $\alpha\,\mathrm{id}+\beta$ est solution

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(\alpha x+\beta)+\beta = ax+b$$

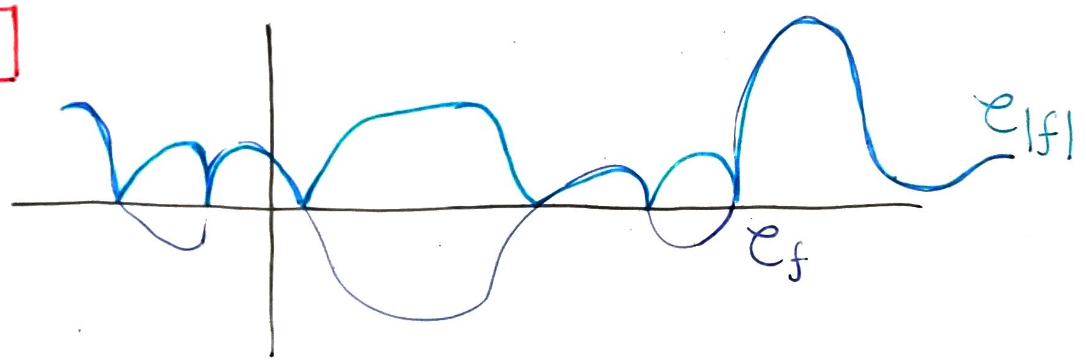
$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha^2 x + (\alpha\beta+\beta) = ax+b$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = a \\ \alpha\beta+\beta = b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{a} \\ \beta = \dfrac{b}{1\pm\sqrt{a}} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \sqrt{a}\,\mathrm{id} + \frac{b}{1+\sqrt{a}},\ -\sqrt{a}\,\mathrm{id} + \frac{b}{1-\sqrt{a}} \right\}$$

$\boxed{1}$



$$|f| = |\mathrm{id}| \circ f \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}$$

$\mathbb{R}^I$ est partiellement ordonné

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$$

Fonctions continues

Un corrigé.

Exercice 6. *Points fixes (à savoir refaire)*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.

On suppose f continue. Montrer que f a un point fixe.

Comme je ne sais plus si on l'a fait : notons $g = f - \mathrm{id}$, g est continue comme différence de deux fonctions continues et $g(0) = f(0) \geqslant 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$). Donc $0 \in [g(1), g(0)]$ et donc d'après le TVI il existe (au moins) un réel $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$, *i. e.* tel que $f(x) = x$.

Exercice 7. On s'intéresse dans cet exercice à la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On considèrera également les différentes fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_a(0) = a$.

Ainsi, on a $f_0 = f$.

1. a. Montrer que f est PVI.

   Indication : distinguer deux types d'intervalles, ceux qui comprennnent 0 *et les autres.*

   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord qu'on a $f\big(I\big) = f_{|I}\big(I\big)$. Traitons quatre cas :

   - Si $0 \notin I$ alors f_I est continue par théorèmes généraux donc $f\big(I\big) = f_{|I}\big(I\big)$ est bien un intervalle par TVI.
   - Si $I = \{0\}$ alors $f\big(I\big) = f\big(\{0\}\big) = \{0\}$ est bien un intervalle.
   - Si $0 \in I$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \in I$ alors comme I est un intervalle on a $[0, \varepsilon] \subset I$.
     Notons $(u_n)_n = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_n = \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
     Les deux suites sont de limite nulle et positives à partir du rang 1 donc ACR elle sont à valeurs dans $[0, \varepsilon]$. Considérons un rang n_0 tel que $u_{n_0},\ v_{n_0} \in [0, \varepsilon] \subset I$.
     Comme I est un intervalle on a $[u_{n_0}, v_{n_0}] \subset I$. Par croissance de l'aplication « image directe par f » on a donc $f(I) \supset f([u_{n_0}, v_{n_0}]) = f_{\big|[u_{n_0}, v_{n_0}]}([u_{n_0}, v_{n_0}]) = [-1, 1]$ par TVI.
     Mais comme f est à valeurs dans $[-1, 1]$ on a aussi $[-1, 1] \subset f(I)$.
     Et donc, finalement, $f(I) = [-1, 1]$.
   - Sinon, on a $0 \in I$ mais I n'est pas réduit à 0 et ne comprend pas de réel positif. Il existe donc $\alpha < 0$ tel que $\alpha \in I$. En notant $\varepsilon = -\alpha$ on a donc $\varepsilon \in -I$ et d'après le cas précédent $f\big(-I\big) = [-1, 1]$. Mais f est impaire donc $f\big(I\big) = -f\big(-I\big) = -[-1, 1] = [-1, 1]$ qui est un intervalle.

   b. Sans démonstration (donner juste l'idée), donner une CNS sur a pour que f_a soit PVI.

   La démonstration précédente montre en fait que l'image directe par f d'un intervalle comprenant 0, est $[-1, 1] \cup \{a\}$ qui est un intervalle si et seulement si $a \in [-1, 1]$. La CNS est donc $a \in [-1, 1]$.

2. a. Montrer que f est discontinue.

   On a ainsi montré que la "réciproque du TVI" est fausse.

   On utilise la caractérisation séquentielle de la limite.

   Les deux suites $(u_n)_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_n = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ de limite nulle. Mais $f(u_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$ alors que $f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1 \to 1$.

   Comme $0 \neq 1$ la fonction $f_{\big|\mathbb{R}^*}$ n'a pas de limite en 0, donc en particulier f n'est pas continue en 0.

   b. Plus généralement, que dire de la continuité d'une fonction f_a ?

   On vient de voir que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f_a(x)$ n'existe pas, cette limite ne peut donc pas valoir $f_a(0)$, quelle que soit la valeur de a. Ainsi f_a ne peut pas être continue.

EXO CONT

$\boxed{7}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\boxed{7/1/a}$ Montrons que f est PVI

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$

Traitons deux cas

<u>1er cas</u> $(0 \notin I)$:

f est continue sur I par théorème généraux

Donc d'après le TVI-Sup $f^{\rightarrow}(I)$ est un intervalle

<u>2e cas</u> $(I = \{0\})$:

$f^{\rightarrow}(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\}$ qui est un intervalle

<u>3e cas</u> $(0 \in I$ et $I \neq \{0\})$:

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[0, \varepsilon] \subset I$ ou $[-\varepsilon, 0] \subset I$

<u>1er CYKA</u> $([-\varepsilon, 0] \subset I)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Or $\begin{cases} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = 1 \\ f\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = -1 \end{cases}$ et f continue sur $\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right]$

Donc d'après le TVI

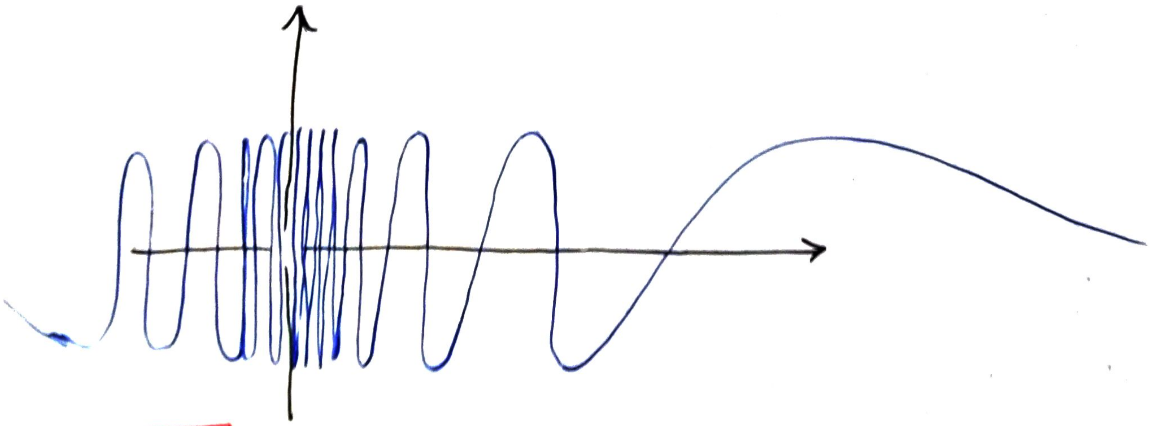
$\forall \gamma \in [-1,1], \exists c \in \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right] \subset I, \ f(c) = \gamma$

Ainsi $f^{\rightarrow}(I) \supset [-1, 1]$

Or $f^{\rightarrow}(I) \subset [-1, 1]$ car $\begin{cases} 0 \in [-1, 1] \\ \sin : D_{\sin} \longrightarrow \underline{\underline{[-1, 1]}} \end{cases}$

Par double inclusion,

$$f^{\rightarrow}(I) = [-1, 1]$$



7/2/a

$f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \neq f(0)$. Par CSC, f discontinue en 0

Exercice 8. *Friandise*

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Uniforme continuité et lipschitzianité

Exercice 9. *Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.*

1. Montrer la caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité : $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) - f(v_n) = 0$.
2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(t^2) \end{array} \right.$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 10. *Une majoration.*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.
   Montrer qu'il existe deux réels a et b tels qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$.
   Indication : pour $x > 0$, majorer $|f(x) - f(0)|$ à l'aide de la définition de la lipschitzianité.
2. Réciproquement, une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe deux réels a et b vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$ est-elle nécessairement lipschitzienne ?

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.

3. L'ensemble des fonctions PVI forme-t-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$?

   S'il l'était, une différence de fonctions PVI serait toujours PVI. Par exemple, $f_1 - f = \chi_{\{0\}}$ serait PVI. Ce n'est pas le cas car $\mathbb{R}$ est un intervalle mais $\chi_{\{0\}}(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ ne l'est pas.
   Conclusion, l'ensemble des fonctions PVI ne forme pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 8. *Friandise*

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

• Notons $g = f + \mathrm{id}$. La fonction g est continue comme différence de fonctions continues.

• La fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car pour tout réel x, on a ou bien $x \in \mathbb{Q}$ et $g(x) = f(x) + x$ est la somme d'un irrationnel et d'un rationnel, ou bien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et donc $g(x) = f(x) + x$ est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel.

• La fonction g est constante, sinon elle prendrait au moins deux valeurs $\alpha < \beta$, et d'après le TVI elle prendrait toutes les valeurs de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ qui ne contiendrait donc que des irrationnels, contradiction.

• Finalement f est de la forme $f = x \mapsto -x + b$. En évaluant en $\gamma = b/2$: $f(\gamma) = f(b/2) = -b/2 = -\gamma$, donc si γ est irrationnel alors γ est rationnel, et si γ est rationnel alors γ est irrationnel. Dans tous les cas on a une contradiction.

EX M CONT

$\boxed{9/1}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposition. Supposons f n'est pas $\mathcal{UC}$

ie il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, $\exists x, a \in I$, $\begin{cases} |x-a| < \eta \\ |f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$

Pour $\eta = 1$ on obtient $x_1, a_1 \in I$, $\begin{cases} |x-a| < 1 \\ |f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$

$\vdots$

Pour $\eta = \frac{1}{n}$ on obtient $x_n, a_n \in I$, $\begin{cases} |x_n-a_n| < \frac{1}{n} \\ |f(x_n)-f(a_n)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$

On obtient deux suites $(x_n)_n$ et $(a_n)_n$ telles que

$x - a \xrightarrow[\infty]{} 0$ par TdG

mais $f\circ x - f \circ a \underset{\infty}{\not\to} 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $f \in \mathcal{UC}$

ie $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x, a \in I$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Soient u et $v \in I^{\mathbb{N}}$ tq $u - v \xrightarrow[\infty]{} 0$

Soit $\check{\varepsilon} > 0$. $f \in \mathcal{C}$ donc il existe $\check{\eta} \geqslant 0$ tel que

$\forall x, a \in I$, $|x-a| < \check{\eta} \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \check{\varepsilon}$

$u - v \to 0$ donc par déf de la limite avec $\varepsilon = \check{\eta}$

On obtient $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n - 0| < \check{\eta}$

Soit $n \geqslant n_0$. On a $|u_n - v_n| < \check{\eta}$ donc par UC de f

$$|f(u_n) - f(v_n)| < \check{\varepsilon}$$

$\boxed{9/2}$

rpl $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$u := \sqrt{2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}} + \pi}$ $\quad v := \sqrt{2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$

on a

$$u - v = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}} + \pi} + \sqrt{2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}} \longrightarrow 0$$

$$f \circ u - f \circ v = \cos \circ (2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}} + \pi) - \cos \circ (2\pi \, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = -2 \underset{\infty}{\not\to} 0$$

$\boxed{10/1}$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(0)| \leqslant k|x|$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| &\leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \\ &\leqslant k|x| + |f(0)| \\ &\leqslant a|x| + b \end{aligned}$$

en posant $\begin{cases} k = a \\ b = |f(0)| \end{cases}$

$\boxed{10/2}$

$$a\,|\cos \circ \mathrm{id}^2| + b \leq 1$$

Posons $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

D'après 9, $\cos \circ \mathrm{id}^2$ n'est pas UC

donc $\cos \circ \mathrm{id}^2$ n'est pas $\mathcal{L}$.