Continuité

Dans tout le chapitre, sauf mention du contraire

$$\begin{cases} I \text{ est une réunion d'intervalles triviaux} \\ a \in I \\ f : I \to \mathbb{R} \end{cases}$$

I Fonction continues. Structure

1 Définition. Exemples.

def

1 f est dite continue en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ie $f \xrightarrow[a]{} f(a)$

ie $\lim_a f$ existe

2 f est dite continue sur I lorsqu'elle est continue en tt point de I

ex

1 $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ est continue en $\mathbb{R}$

2. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3. $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

4. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

<u>def</u>

1 f est dite continue à droite en a lorsque

$$\lim_{a^+} f = f(a)$$

2 ——————————— gauche ———————

$$\lim_{a^-} f = f(a)$$

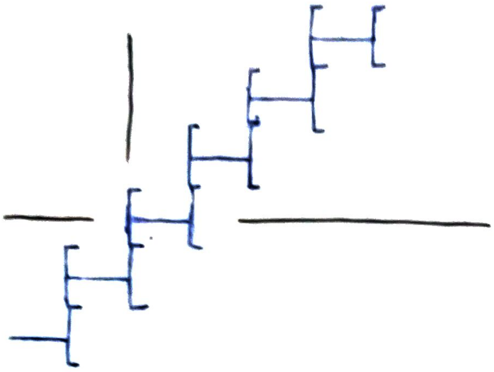
3 f est dite continue à gauche (resp. à droite) sur I lorsqu'elle l'est en tout point de I.

ex

1. Toute fonction continue est continue à gauche et à droite

2. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$ est continue : à droite sur $\mathbb{R}$

à gauche sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



thm CSC

$$f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall u \in I^{\mathbb{N}},\ u \to a \Rightarrow f(u) = f(a)$$

ex

On retrouve que pour $a \in \mathbb{Z}$, $\lfloor \cdot \rfloor$ est discontinue en a, car $a - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

mais $\lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor = a - 1 \longrightarrow a - 1 \neq a$

2 Structure

rpl $\mathbb{R}^{I}$ est muni d'opérations $+, \times, \cdot$

$f + g = x \mapsto f(x) + g(x)$; $f \times g = x \mapsto f(x) \times g(x)$; $\lambda \cdot f = x \mapsto \lambda f(x)$

$(\mathbb{R}^I, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

thm

L'ensemble des fonctions continues en a (resp sur I) est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^I, +, \times, \cdot)$

ie la continuité est préservée par $+, \times, \cdot, -\mathrm{id}$, et que les neutres sont $x \mapsto 0$ pour $+$ et $x \mapsto 1$ pour $\times$.

dem c'est une reformulation des PAL.

notn (rappel)

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de type $I \to \mathbb{R}$

thm

Soit J une réunion d'intervalles non-triviaux
Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ alors

$g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

dem c'est une reformulation du théorème de composition des limites

ex Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x^2} \sin(x) \end{cases}$.

$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. En effet,

- $\exp$ et $(\mathrm{id})^2$ sont continues
  donc par composition, $\exp \circ (\mathrm{id})^2$ est continue
- $\sin$ est continue
  donc par produit f est continue

Lorsqu'une fonction s'écrit come : +, ×, ·, ∘ de fonctions continues, on peut écrire ~~boooh ça marche~~ "f continue par théorèmes généraux"

II Valeurs intermédiaires

1 Variations sur le TVI

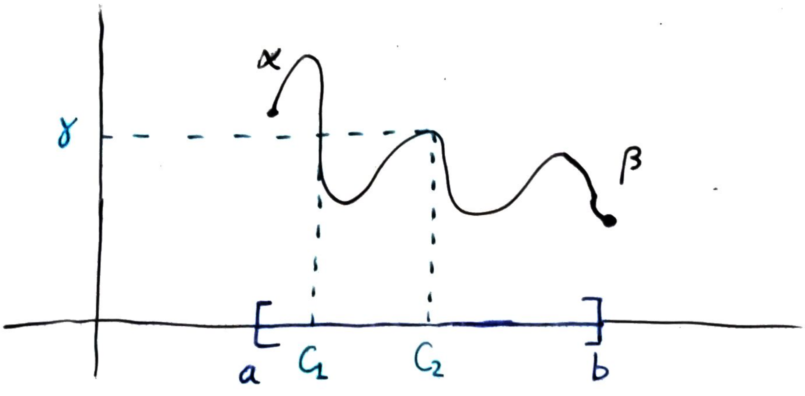
thm TVI-TS sur un fermé

Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Notons $\begin{cases} \alpha = \min\{f(a), f(b)\} \\ \beta = \max\{f(a), f(b)\} \end{cases}$

Alors $\forall \gamma \in [\alpha, \beta], \exists c \in [a,b], f(c) = \gamma$

remq



- On n'a pas en général unicité de c
- Les éléments de $[\alpha, \beta]$ ne sont pas en général les seuls à avoir un antécédent par f

demm

Soit $\gamma \in [\alpha, \beta]$

Quitte à changer f en $f-\gamma$ on peut supposer $\gamma = 0$.

remq

$$0 \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha\beta \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow f(a) f(b) \leqslant 0$$

On procède par dichotomie

On définit deux suites a, b par:

- $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ de sorte que $f(a_0) f(b_0) \leqslant 0$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, une fois a_n et b_n définis et tels que $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$, on note $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ et on traite deux cas.
  - si $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$

    $\begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases}$ et on a bien $f(a_{n+1}) f(b_{n+1}) \leqslant 0$

  - sinon

    $f(a_n) f(c_n) > 0$ mais $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$

    donc $f(a_n) f(c_n) f(b_n) \leqslant 0$

    donc $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$

    $\begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases}$ et on a bien $f(a_{n+1}) f(b_{n+1}) \leqslant 0$

Par construction, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$
- $a \in \underline{\smile}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$
- $b \in \supset(\mathbb{N}, \mathbb{R})$
- $b - a = \dfrac{b-a}{2^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}}} \xrightarrow[\infty]{} 0$

a et b sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite c

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) f(b_n) \leq 0$

$a \longrightarrow c$ et f continue donc par CSC

$$f(a) \longrightarrow f(c)$$

De même :

$b \longrightarrow c$ donc $f(b) \longrightarrow f(c)$

D'après les PALs, $f(a)f(b) \longrightarrow f(c)^2$

Les inégalités larges passent à la limite

donc $f(c)^2 \leqslant 0$ donc $f(c)^2 = 0$

par intégrité de $(\mathbb{R}, +, \times)$ $f(c) = 0$

ex app

Mq le polynôme $X^3 + X - 1$ a une racine $r \in [0, 1]$

Notons $f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 + x - 1 \end{cases}$

- f est continue sur $[0, 1]$ car polynomiale.
- $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ et $0 \in [-1, 1]$.

  ie $0 \in [f(0), f(1)]$

Donc d'après le TVI (- TS sur un fermé)

Il existe $r \in [0, 1]$ tel que $f(r) = 0$ i.e.

tel que r est racine de $X^3 + X - 1$

remq

- Plus généralement, le TVI appliqué à une fonction f peut permettre de montrer que :

  — f s'annule

  — f a un <u>point fixe</u> (en appliquant à $f - \mathrm{id}$)

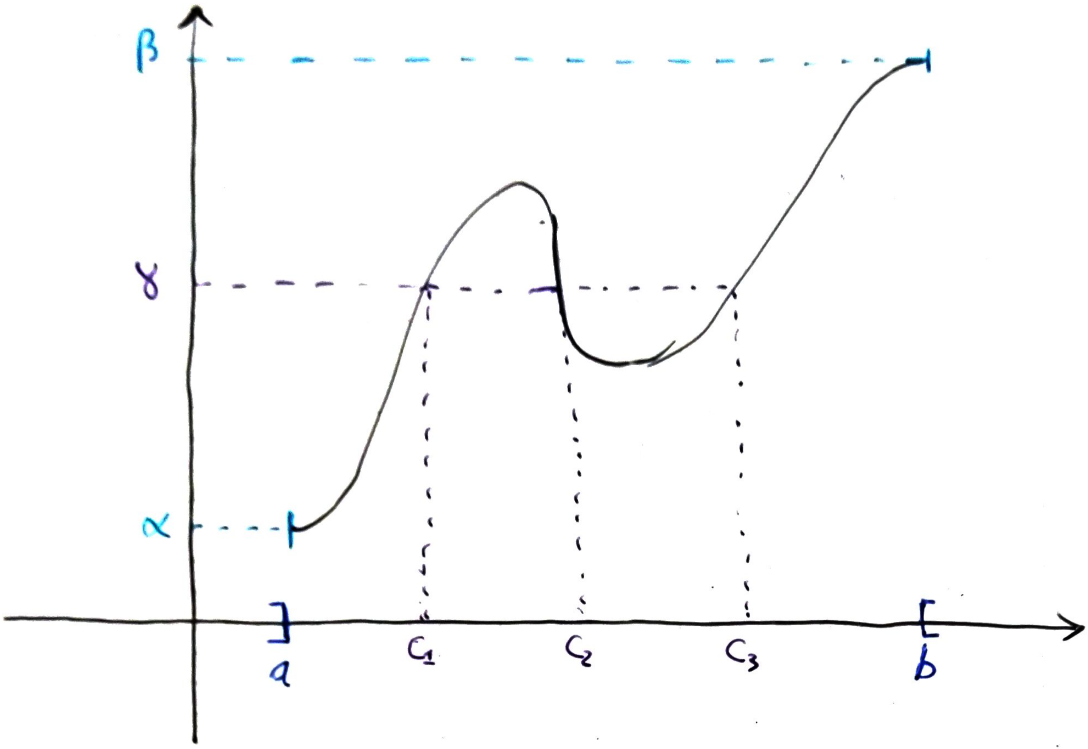
thm TVI sur un ouvert

Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathbb{R})$.
Supposons que f ait des limites en a^+ et en b^-

Notons $\begin{cases} \alpha := \min\left\{\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right\} \\ \beta := \max\left\{\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right\} \end{cases}$

Alors $\forall \gamma \in]\alpha, \beta[, \exists c \in]a,b[, f(c) = \gamma$

dem
Notons $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\beta-\gamma, \gamma-\alpha, 1\}$



Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$, tel que,

$$\forall x \in]a, b[, \ (x \leq a+\eta \ \text{ ou } \ x \geq b-\eta)$$
$$\Rightarrow f(x) \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\cup]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$$

Or $\gamma \notin]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\cup]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$ par définition de ε

En particulier en notant

$$\begin{cases} \alpha' := \min\{f(a+\eta), f(b-\eta)\} \\ \beta' := \max\{f(a+\eta), f(b-\eta)\} \end{cases}$$

On a $\gamma \in [\alpha', \beta']$. On a $f_{|[a+\eta, b-\eta]}$ est continue.

D'après le TVI sur un fermé il existe $c \in [a+\eta, b+\eta] \subset]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$

app

Mq Tout polynôme de degré impair à coefficients dans $\mathbb{R}$ a une racine dans $\mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = a_{2n+1}(\mathrm{Id})^{2n+1} + \dots + a_1 \mathrm{Id} + a_0$

On a f continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale

$$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} f = -\operatorname{sgn}(a_{2n+1})\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = +\operatorname{sgn}(a_{2n+1})\infty \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \alpha := \max\left\{\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f\right\} = +\infty \\ \beta := \min\left\{\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f\right\} = -\infty \end{cases}$

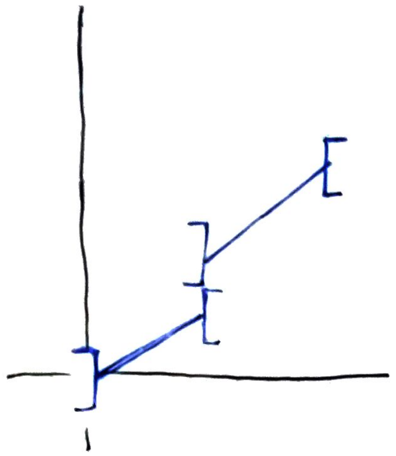
Ainsi $0 \in]-\infty, +\infty[=]\alpha, \beta[$

D'après le TVI (- TS sur un ouvert), il existe $c \in]-\infty, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ ie tq c est racine du polynôme

remq

- Il y a aussi un TVI sur un intervalle semi-ouvert
- le TVI ne se généralise pas si f n'est pas définie sur un intervalle

ex



La fonction ayant ce graphe est continue sur $]0,1[\cup]1,2[$

mais les réels de $[1,2]$ n'ont pas d'antécédent par f alors qu'elle prend des valeurs < 1 et des valeurs > 2.

thm TVI-SUP

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Si J est un intervalle inclus dans I

alors $f^{\rightarrow}(J)$ est un intervalle

Autrement dit : l'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

dem

rpl K est un intervalle $\Leftrightarrow (\forall x < y \in K, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in K)$

Soit J un intervalle inclus dans I.

Montrons que $f^{\rightarrow}(J)$ est un intervalle.

Soient $x < y \in f^{\rightarrow}(J)$.

Ainsi il existe $\begin{cases} u \in J \text{ tq } x = f(u) \\ v \in J \text{ tq } y = f(v) \end{cases}$. Notons $\begin{cases} a := \min\{u, v\} \\ b := \max\{u, v\} \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} x = \min\{f(a), f(b)\} \\ y = \max\{f(a), f(b)\} \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{R}$. Supposons $x < z < y$

En particulier $z \in [x, y]$ et f continue sur $[a, b]$.

D'après le TVI-TS il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = z$

et $c \in [a, b] \subset J$ car J intervalle.

D'où $z \in f^{\rightarrow}(J)$ par définition

app Que dire de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

$\mathbb{R}$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ donc d'après le TVI-sup, $f^{\rightarrow}(\mathbb{R})$ est un intervalle <u>inclus dans $\mathbb{Z}$</u>.

Or un intervalle inclus dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement un singleton $\{m\}$

Donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \{m\})$

Donc $f = x \longmapsto m$

ie f est constante

rem

On a équivalence entre:

i/ L'image directe par f d'un intervalle est un intervalle

Ainsi $\begin{cases} x = \min\{f(a), f(b)\} \\ y = \max\{f(a), f(b)\} \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{R}$. Supposons $x < z < y$

En particulier $z \in [x, y]$ et f continue sur $[a, b]$.

D'après le TVI-TS il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = z$
et $c \in [a, b] \subset J$ car J intervalle.

D'où $z \in f^{\rightarrow}(J)$ par définition

app. Que dire de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

$\mathbb{R}$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ donc d'après le TVI-sup,
$f^{\rightarrow}(\mathbb{R})$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{Z}$.

Or un intervalle inclus dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement un singleton $\{m\}$

Donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \{m\})$

Donc $f = x \longmapsto m$

ie f est constante

remq

On a équivalence entre :

i/ L'image directe par f d'un intervalle est un intervalle ii/ $\forall [a,b] \subset I,\ \forall \gamma \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}],$

$\exists c \in [a,b],\ f(c) = \gamma$

Une fonction vérifiant ceci est appelée une fonction PVI

("qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires")

Le TVI peut donc s'écrire : $\mathcal{C} \Rightarrow \text{PVI}$

2 Variations sur le théorème de la bijection

<u>remq</u>

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ pas nécéssairement continue.

Si f est strictement monotone, alors f est injective

<u>dem</u>

Soit $a, b \in I$. On suppose $a \neq b$.

Si $a < b$ alors par stricte monotomie

on a $\underbrace{f(a) f(b)}_{\text{car } f \in \nearrow}$ ou $\underbrace{f(a) > f(b)}_{\text{car } f \in \searrow}$

donc $f(a) \neq f(b)$

Si $a > b$ idem.

On a donc $\forall a, b \in I,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

ie $\underline{\underline{f \in \ominus\odot}}$

<u>thm</u> de la bijection sur un fermé

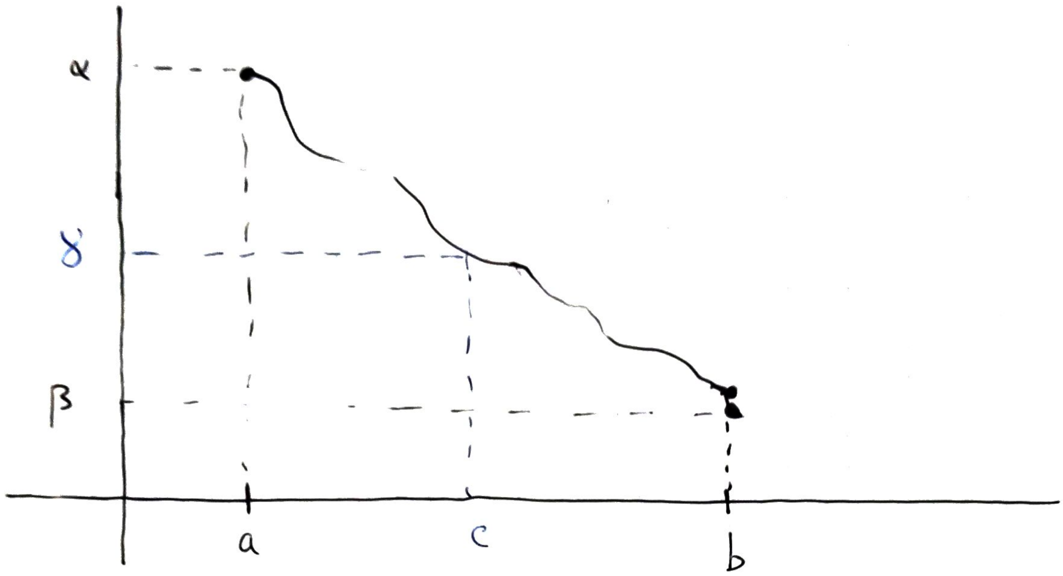
Soient $a < b \in I$. Soit $f \in (\nearrow \cup \searrow \cap \mathcal{C})([a,b], \mathbb{R})$

Alors en notant $\begin{cases} \alpha := \min \{f(a), f(b)\} \\ \beta := \max \{f(a), f(b)\} \end{cases}$

On a $\forall \gamma \in [\alpha, \beta],\ \exists ! c \in [a,b],\ f(c) = \gamma$

remq

Cette fois f ne peut pas prendre de valeur n'appartenant pas à $[\alpha, \beta]$



dem

Soit $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Par continuité de f, d'ap. le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tq $f(c) = \gamma$

Par stricte monotonie, $f \in$ (Bij) donc c unique.

app (rpl)

Le théorème de la bijection sur un fermé permet de construire les fonctions réciproques trigonométriques acos et atan

Pour arctan, on utilise...

thm de la bijection sur un ouvert

Soient $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathbb{R})$.

Supposons f strictement monotone.

Alors f a des limites en a^+ et b^-.

En notant $\begin{cases} \alpha := \min\left\{ \lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f \right\} \\ \beta := \max\left\{ \lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f \right\} \end{cases}$

On a $\forall \gamma \in]\alpha, \beta[, \exists! c \in]a,b[, f(c) = \gamma$

dem

Les limites existent d'après le TLM.
Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$.
f est continue donc par TVI il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$. f est strictement monotone donc injective donc c est unique.

app

Soit $f \in (\supset \cap \mathcal{C})(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. f a un unique point fixe

$f - id = f + (-id)$ et $f \in \underline{\supset}$ et $-id \in \underset{+}{\supset}$ donc $f - id \in \underset{+}{\supset}$

$$f \in \supset \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{-\infty} f \in]-\infty, +\infty] \\ \lim\limits_{+\infty} f \in [-\infty, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{-\infty} f - id = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f - id = -\infty \end{cases}$$

$0 \in \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{C}$ par théorème généraux

D'après le théorème de la bijection sur un ouvert,

il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$(f - id)(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0$$
$$\Leftrightarrow f(c) = c$$

III Bijections continues

L'objectif de cette partie est de montrer que

$$f \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}$$

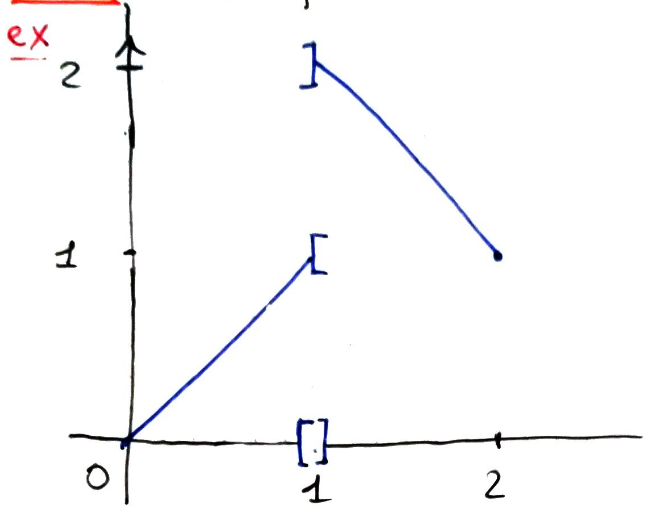
1 Monotonie des injections continues

thm Soit I un intervalle. Soit $f \in (\mathcal{C} \cap \mathcal{I})(I, \mathbb{R})$

On a f strictement monotone

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle

ex

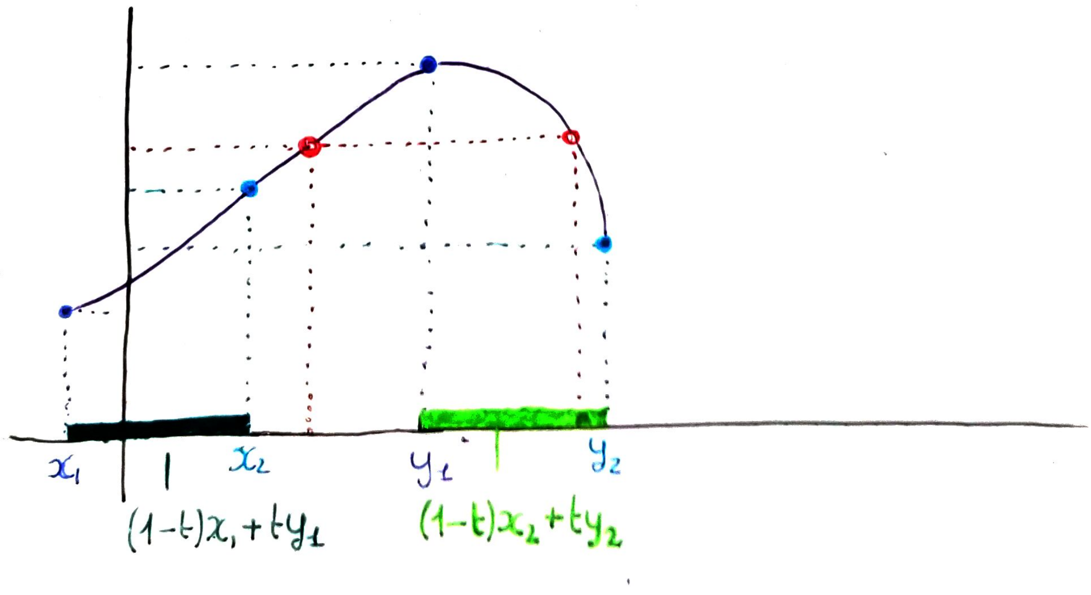


$$f : \begin{cases} [0,2]\setminus\{1\} \longrightarrow [0,2[\\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 3-x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On a $f \in \underline{\underline{\mathcal{C}}} \cap \underline{\underline{\mathcal{B}}}$ mais $f \underline{\underline{\notin \nearrow \cup \searrow}}$

ex $\begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

dem par l'absurde.



Supp $f \notin \nearrow \cup \searrow$. Alors $f \notin \searrow$ donc il existe $x_1 < y_1 \in I$ tel que $f(x_1) \leqslant f(y_1)$

De même $f \notin \nearrow$ donc il existe $x_2 < y_2 \in I$ tel que $f(x_2) \geqslant f(y_2)$

Posons $g : \begin{cases} [0, 1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f((1-t)x_2 + tx_1) - f((1-t)y_1 + ty_2) \end{cases}$

$g(0) = f(x_1) - f(x_2)$

$g(1) = f(y_1) - f(y_2)$

$g \in \mathcal{C}$ par théorèmes généraux

Ainsi $0 \in [g(0), g(1)]$ donc d'après le TVI, il existe

$t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 0$

ie. $f((1-t_0)x_1 + t_0x_2) = f((1-t_0)y_1 + t_0y_2)$

donc $(1-t_0)x_1 + t_0x_2 = (1-t_0)y_1 + t_0y_2$ car $f \in \mathcal{G}\!\!\!\!\bigcirc$

donc $\underbrace{(1-t_0)}_{\geqslant 0}\underbrace{(x_1 - y_1)}_{<0} = \underbrace{t_0}_{\geqslant 0}\underbrace{(y_2 - x_2)}_{>0}$

donc $(1-t_0)(x-y_1) = t_0(y_2 - x_2) = 0$

donc $1 - t_0 = t_0 = 0$

donc $1 = 0$ bon... Imp.

2 Continuité des surjections monotones $(\mathcal{S} \cap (\nearrow \cup \searrow) \subset \mathcal{C})$

prop

Soit $f : I \to J$ avec J un intervalle

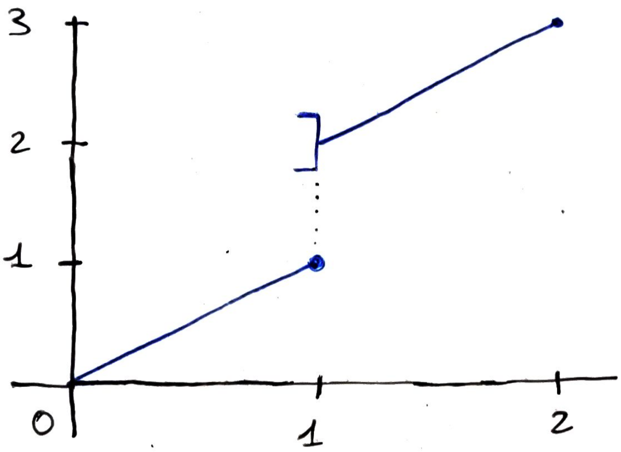
On suppose f surjective et strictement monotone

Alors f est continue

Autrement dit, $(\mathcal{S} \cap (\nearrow \cup \searrow))(I, J) \subset \mathcal{C}(I, J)$

⚠ C'est faux si J n'est pas un intervalle

c-ex



$$f : \begin{cases} [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup]2,3] \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1+x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

dem

Soit $a \in I$. On veut montrer que $\lim\limits_a f = f(a)$

Traitons le cas où a n'est pas une extremité de I

Par TLM, $\begin{cases} \lim\limits_{a^-} f \\ \lim\limits_{a^+} f \end{cases}$ existent. Si $f \in \nearrow$, $\lim\limits_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$

Si $f \in \searrow$, $\lim\limits_{a^-} f \geq f(a) \geq \lim\limits_{a^+} f$

Quitte à changer f en $-f$ on est dans le premier cas

$\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$

- Montrons $\lim_{a^-} f = f(a)$ par l'absurde

Si on avait $\lim_{a^-} f \neq f(a)$ on aurait

$\lim_{a^-} f < f(a)$.

Notons $\gamma := \frac{1}{2}\left(\lim_{a^-} f + f(a)\right)$

Par stricte croissance, $\begin{cases} \forall x \in I,\ x < a \Rightarrow f(x) < \gamma \\ \forall x \in I,\ x \geq a \Rightarrow f(x) > \gamma \end{cases}$

En particulier $\forall x \in I,\ f(x) \neq \gamma$

Donc γ n'a pas d'antécédent par f imp

- De même $f(a) = \lim_{a^+} f$

Pour les deux autre cas, on prend soit le premier •, soit le deuxième

D'où $\lim_{a} f = f(a)$

3 Continuité d'une réciproque

thm

Soit $f \in \mathcal{C}(I, J)$ avec I un intervalle

Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{C}(J, I)$

remq

On n'a pas supposé que J est un intervalle
mais c'est nécessairement le cas car

$J = f^{\rightarrow}(I)$ est un intervalle d'après le TVI[1]

demn

$f \in \mathcal{C} \cap \oplus$ et I un intervalle donc f monotone

donc f^{-1} de même monotonie

et $f^{-1} \in \oplus \Rightarrow f^{-1} \in \oplus$

et $f^{-1} : J \longrightarrow \underbrace{I}_{\text{intervalle}}$

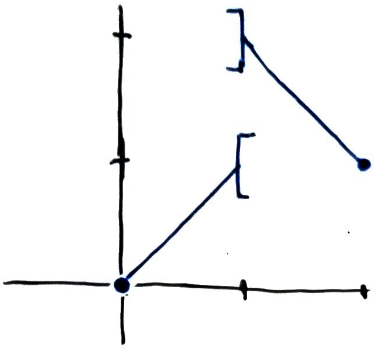
donc $f^{-1} \in \mathcal{C}$

---

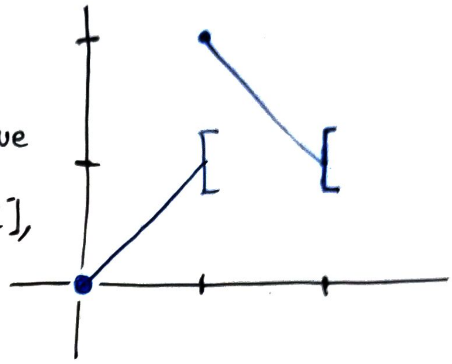
[1] TVI-SUP (image directe d'un intervalle par $f \in \mathcal{C}$ est un intervalle)

Ce théorème est faux
si I n'est pas un intervalle

c-ex



est continue sur $[0,1[\cup]1,2]$, mais



n'est pas continue sur $[0,2[$

app

$$\{\mathrm{acos}, \mathrm{atan}, \mathrm{arctan}, \sqrt{\ }, \sqrt[n]{\ }\} \subset \mathcal{C}(\dots,\dots)$$

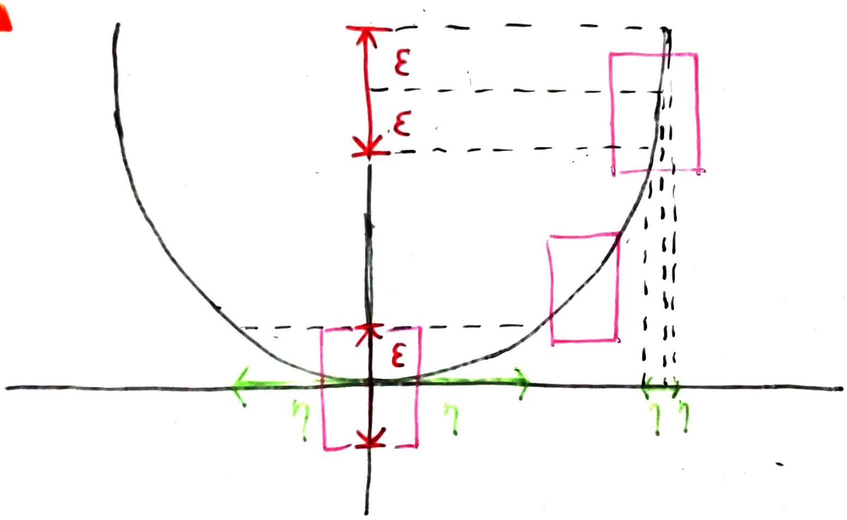
IV Fonctions "mieux que continues"

1 Uniforme continuité

rpl

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

⚠ η dépend de ε mais aussi de a



def f uniformément continue sur I

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (a,x) \in I^2, \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

⚠ Ici, $\eta \not\leftrightarrow a$

Contrairement à la continuité, l'UC[1] est une notion globale

---

[1] Uniforme continuité

interp_géo

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rectangle de longueur ε 

tel que ce rectangle peut glisser le long de $\mathcal{C}_f$ sans

que $\mathcal{C}_f$ sorte par la longueur

c-ex $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas UC

Mtq $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (a, x) \in \mathbb{R}^2, |x-a| < \eta$ et $|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$

Posons $\varepsilon = 1$

Soit $\eta > 0$

Posons $\begin{cases} a = \frac{1}{\eta} \\ x = a + \frac{\eta}{2} \end{cases}$

On a $\begin{cases} |x-a| = \left|\frac{\eta}{2}\right| < \eta \\ |f(x)-f(a)| = \left|\left(a+\frac{\eta}{2}\right)^2 - a^2\right| = \left(2a+\frac{\eta}{2}\right) \times \frac{\eta}{2} \end{cases}$

$$= \left(\frac{2}{\eta} + \frac{\eta}{2}\right)\frac{\eta}{2}$$

$$= 1 + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2$$

$$\geqslant 1$$

$$= \varepsilon$$

remq

- $U\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$
- ⚠ $U\mathcal{C} \not\Leftarrow \mathcal{C}$

ex de fonctions $U\mathcal{C}$

1 Fonctions affines

2 cos, sin

3 $\sqrt{\ }$

demm

1 Mq les fonctions constantes sont $U\mathcal{C}$

Supp $f := x \mapsto c$

Mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, a) \in \mathbb{R}^2, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \text{TREE}(3)$

Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons $|x - a| < \eta$.

On a $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ par définition

Mq les fonctions affines non const sont $U\mathcal{C}$

Supp $f := m \cdot \mathrm{id} + p$ avec $m \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$

Supp $|x - a| < \eta$

On a $|f(x) - f(a)| = |mx + p - mx - p| = |m||x - a| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|} = \eta$

2 Montrons que cos est UC (par translation, sin aussi)

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon$. Soient $x, a \in \mathbb{R}$

Supp $|x - a| < \eta$

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= \left| -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \\ &\leqslant 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \end{aligned}$$

rpl $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$

donc ici : $$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &\leqslant 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \\ &\leqslant 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \\ &\leqslant 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \\ &\leqslant |x - a| \\ &\leqslant \varepsilon \\ &= \eta \end{aligned}$$

3

lemme $\forall x > y \geqslant 0, \sqrt{x-y} \geqslant \sqrt{x} - \sqrt{y}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{x-y} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}\right)^2 \geqslant \sqrt{x}^2 \\ &\Leftrightarrow x - y + 2\sqrt{y}\sqrt{x-y} + y \geqslant x \\ &\Leftrightarrow x + 2\sqrt{y(x-y)} \geqslant x \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{y(x-y)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \text{Vrai} \end{aligned}$$

3 Montrons que $\sqrt{\ }$ est UC

Soit $\varepsilon > 0$ Posons $\eta = \varepsilon^2$

Soient $a, x \in \mathbb{R}_+$

Supposons $|a - x| < \eta$

ÀRP : $x \geq a$

Alors d'après le lemme

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} - \sqrt{a} \leq \sqrt{x - a} = \sqrt{|x - a|}$$

donc $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon$

2 Lipschitzianité

Le nom vient du mathématicien Lipschitz

def

1 k-lipschitzianité

$$\forall a, x \in I, \ |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$$

ie $\forall x \neq a \in I$, $\underbrace{\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right|}_{\text{tx d'accroissement tj borné par } k} \leq k$

2 lipschitzianité

$\exists k > 0$, f est k-lipschitzianité

3 contractance

$\exists k \in]0, 1[$, f est k-lipschitzianité

notn FEFs

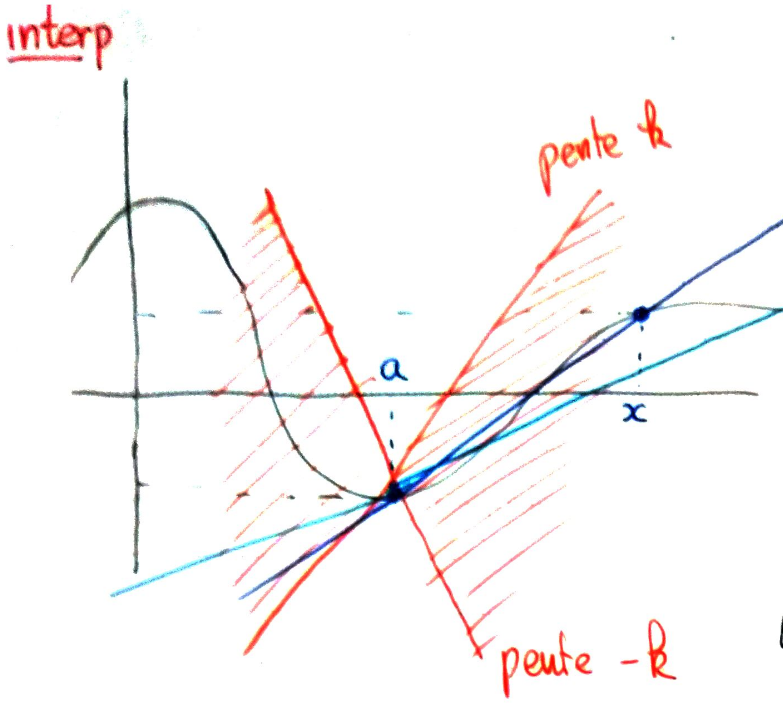
$k\text{-}\mathcal{L} := \underset{f: A \to B}{\text{FEF}}$ f est k-lipschitzienne

$\mathcal{L} := \underset{f: A \to B}{\text{FEF}}$ f est lipschitzienne

remq

$$k_1 \leq k_2 \Rightarrow k_1\text{-}\mathcal{L} \subset k_2\text{-}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$$

interp



$f \in k\text{-}\mathcal{L}$ ssi

si on fait glisser le long de $\mathcal{C}_f$ un cône délimité par des droites de pente k et $-k$, toutes les sécantes restent dedans.

ex

1 $|\cdot| \in 1\text{-}\mathcal{L}$. En effet $\forall a,x \in \mathbb{R}$, $\big||x|-|a|\big| \leq |x-a|$

par IT (renversée)

2 $\{\cos, \sin\} \subset 1\text{-}\mathcal{L}$. En effet, $|\cos x - \sin a| = \left|-2 \sin\frac{x+a}{2} \sin\frac{x-a}{2}\right|$

$$= 2 \underbrace{\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|}_{\leq 1} \underbrace{\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|}_{\leq \frac{x-a}{2}}$$

$$\leq |x-a|$$

thm

- $\mathcal{L} \subset \mathcal{UC}$
- $\mathcal{L} \not\supset \mathcal{UC}$

dem Un contre-exemple : $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \in \mathcal{UC}$ mais $\sqrt{\ } \notin \mathcal{L}$

par l'absurde. Supp $\overset{\text{def}}{\exists} k>0$, $\forall a \neq x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right| \leq k$

Pour $a=0$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \leq k$ imp car $\frac{1}{\sqrt{\ }} \xrightarrow[0^+]{} +\infty \not\leq k$

<u>dem</u>

Supposons qu'il existe $k > 0$.
tel que f est k-$\mathcal{L}$

Mq f est $\mathcal{UC}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ car $k > 0$

Soient $a, x \in I$

Supposons $|x - a| < \eta$

On a $|f(x) - f(a)| < k|x - a|$

or $k > 0$ donc $|f(x) - f(a)| < k\eta = \varepsilon$

V Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Dans cette partie, on note $f : I \to \mathbb{C}$.

<u>ex</u> $f : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$

Les définitions

- $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{C})$: OK!
- $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$: OK!
- f continue à droite ou à gauche : OK!

- f PVI : plus de sens

- $f \in U\mathcal{C}$: OK !

- $f \in \mathcal{L}$: OK !

Les théorèmes

- CSC : vrai

- $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ s-algèbre : vrai

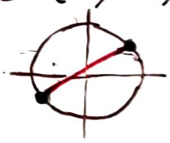
- TVI-TS : plus de sens

  $\underbrace{f(a)f(b)}_{\in \mathbb{C}} \boxed{\leq} 0$

- TVI-SUP : plus de sens

  - Version affaiblie : faux c-ex : $e^{i\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\;\;{}^{\to}([0,2\pi]) = \mathbb{U}$

    $f^{\to}(\text{intervalle}) = \text{convexe}$



- Bijection : plus de sens

- $\not\exists!$ie des $\ominus\odot \cap \mathcal{C}$: plus de sens

- $\mathcal{C}$ité d'une $\circledcirc$ réciproque : vrai (mais hors-prog. :/)

- $\mathcal{L} \subset U\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$: vrai (même preuve)

$\square$