$\mathbb{C}$

L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. *Équations.*

1. Résoudre l'équation $z^2 - 6\mathrm{i}\, z - 6 + 4\mathrm{i} = 0$.
2. Existe-t-il deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$ et $z_1 z_2 = 5 + \mathrm{i}$? Indication : deux nombres de somme S et de produit P sont... ? **Remarque :** essayez de *répondre à la question posée* et pas à une autre.

Exercice 2. *Factorisations (annale CCINP, mais guidée).*

1. Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$: $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.
2. En déduire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.
3. En déduire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

Encore quelques calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 3. *On révise les formes exponentielles*

Soient $z_1,\ z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer qu'on a $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Un peu d'arithmétique*

Soit $\mathcal{S} = \left\{n \in \mathbb{N},\ \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ n = a^2 + b^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit, *i. e.* $\forall (m,n) \in \mathcal{S}^2,\ mn \in \mathcal{S}$.

Remarque : on peut très bien résoudre l'exercice sans nombre complexe mais il peut être agréable de remarquer qu'un élément de $\mathcal{S}$ est toujours le carré du module d'un nombre complexe bien choisi...

Nombres complexes et géométrie

Exercice 5. *Identité du parallélogramme*

1. Étant donnés deux nombres complexes u et v, montrer qu'on a $2(|u|^2 + |v|^2) = |u + v|^2 + |u - v|^2$.
2. Interprétation géométrique ?

Exercice 6. *Similitudes*

1. Que dire d'une similitude directe ϕ qui permute 1 et i (telle que $\phi(1) = \mathrm{i}$ et $\phi(\mathrm{i}) = 1$) ?
2. Montrer le résultat suivant : une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une similitude directe si et seulement si elle préserve les angles orientés et les rapports de distances.

Topologie dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7. *Disques et demi-plan*

1. Montrer qu'un disque ouvert est ouvert dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'un disque fermé est fermé dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer qu'un disque est convexe.
4. Montrer que $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$ est convexe et est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8. *Ouverts/fermés*

Les résultats suivants ont été vus dans $\mathbb{R}$. Restent-ils vrais dans $\mathbb{C}$?

1. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert, mais une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Une réunion finie de fermés est un fermé, mais une réunion infinie de fermés peut ne pas être un fermé.

EX M $\mathbb{C}$

$\boxed{1/1}$ $z^2 - 6iz - 6 + 4i = 0$

$\Delta = -12 - 16i$

$$\begin{cases} Re(\delta)^2 + Im(\delta)^2 = |\delta|^2 = |\delta^2| = |\Delta| = 20 & (1) \\ Re(\delta)^2 - Im(\delta)^2 = -12 & (2) \\ 2 Re\,\delta\, Im\,\delta = -16 & (3) \end{cases}$$

Analyse

$$\begin{cases} Re(\delta)^2 - Im(\delta)^2 = -12 \\ Re(\delta)^2 + Im(\delta)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re\,\delta = \pm 2 \\ Im\,\delta = \pm 4 \end{cases}$$

Synthèse

pour $\delta = 2 + 4i$: $2 Re\,\delta\, Im\,\delta \neq -16$

pour $\delta = -2 - 4i$: $2 Re\,\delta\, Im\,\delta \neq -16$

pour $\delta = -2 + 4i$: $2 Re\,\delta\, Im\,\delta = -16$

pour $\delta = 2 - 4i$: $2 Re\,\delta\, Im\,\delta = -16$

donc les solutions sont $\left\{ \frac{6i + 4i - 2}{2}, \frac{6i + 2 - 4i}{2} \right\}$

$= \{ 5i - 1, \; i + 1 \}$

$\boxed{1/2}$ 2 nombres de somme S et de produit P sont les racines du polynôme $X^2 - SX + P$

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 + i \\ z_1 + z_2 = 3 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ solutions de } z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

$\Delta = (-3 - 2i)^2 - 4(5 + i) = -15 + 8i$

$$|-15+8i| = \sqrt{(-15)^2+8^2} = 17$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 17 \\ a^2-b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ ab = 4 \end{cases}$$

$(a,b) = (1,4)$ convient

$\delta = 1+4i$ convient

$$z_1 = \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2+3i$$

$$z_2 = \frac{3+2i-1-4i}{2} = 1-i$$

conviennent

$\boxed{2/1}$

$$X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$$

$$\Delta = 4\cos(\theta)^2 - 4 = 4(\cos(\theta)^2 - 1)$$
$$= 4(-\sin(\theta)^2)$$

$$X_{1,2} = \frac{2\cos\theta}{2} \pm i\,\frac{2\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i}$$

d'où $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

$\boxed{2/2}$

$$(X^n - e^{i\theta})(X^n - e^{-i\theta}) = X^{2n} - 2\cos\theta \cdot X^n + 1$$

Factorisons $X^n - e^{i\theta}$ en trouvant ses racines.

Une racine est $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n - e^{i\theta} = 0$$
$$\Leftrightarrow z^n = e^{i\theta}$$

Notons $z = re^{i\varphi}$.

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\varphi = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi \equiv \frac{\theta}{n}\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Les racines sont les $e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n[\![$

d'où $X^n - e^{i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

de même, $X^n - e^{-i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{-\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

$$X^{2n} - 2\cos\theta X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\left(X - e^{-i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

$\boxed{3}$ $z_1, z_2 \in \mathbb{U} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$

donc il existe $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} z_1 := e^{i\theta_1} \\ z_2 := e^{i\theta_2} \end{cases}$$

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$= \frac{\left(e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\right)\cancel{e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}}{\left(e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\right)\cancel{e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

$\in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

Correction de deux exercices

Exercice 4. *Un peu d'arithmétique*

Soient n et m deux entiers qui sont tous les deux la somme de deux carrés. Montrer que mn est également la somme de deux carrés.

Soit $\mathcal{S} = \left\{n \in \mathbb{N},\ \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ n = a^2 + b^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit, *i. e.* $\forall (m,n) \in \mathcal{S}^2,\ mn \in \mathcal{S}$.

Remarque : on peut très bien résoudre l'exercice sans nombre complexe mais il peut être agréable de remarquer qu'un élément de $\mathcal{S}$ est toujours le carré du module d'un nombre complexe bien choisi...

Soient m, $n \in \mathcal{S}$. Comme n est la somme de deux carrés d'entiers, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $n = a^2 + b^2 = |a + \mathrm{i}b|^2$.
De même il existe $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $m = c^2 + d^2 = |c + \mathrm{i}d|^2$.
Par suite on a $mn = |a+\mathrm{i}b|^2|c+\mathrm{i}d|^2 = |(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)|^2 = |(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)|^2$, d'où $mn = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$, ce qui prouve que mn est somme de deux carrés.

Exercice 5. *Identité du parallélogramme*

1. Étant donnés deux nombres complexes u et v, montrer qu'on a $2(|u|^2 + |v|^2) = |u+v|^2 + |u-v|^2$.
2. Interprêtation géométrique ?

Notons $u = a + \mathrm{i}b$ et $v = x + \mathrm{i}y$.

On a $2(|u|^2 + |v|^2) = 2(a^2 + b^2 + x^2 + y^2) = (a+x)^2 + (a+y)^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 = |u+v|^2 + |u-v|^2$.

Interprêtation géométrique : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des 4 côtés est égale à la somme des longueurs des carrés des diagonales.

Exercice 6. *Similitudes*

1. Que dire d'une similitude directe ϕ qui permute 1 et i (telle que $\phi(1) = \mathrm{i}$ et $\phi(\mathrm{i}) = 1$) ?

   On cherche ϕ telle que $\begin{cases} \phi(1) = \mathrm{i} \\ \phi(\mathrm{i}) = 1. \end{cases}$ Il existe a et b tells que $\phi = z \mapsto az + b$. Le système s'écrit $\begin{cases} a + b = \mathrm{i} \\ a\mathrm{i} + b = 1. \end{cases}$

   Un coup de Cramer : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 + \mathrm{i}. \end{cases}$

   En utilisant la technique de décomposition vue en cours : ϕ est la symétrie de centre $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

2. Montrer le résultat suivant : une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une similitude directe si et seulement si elle préserve les angles orientés et les rapports de distances.

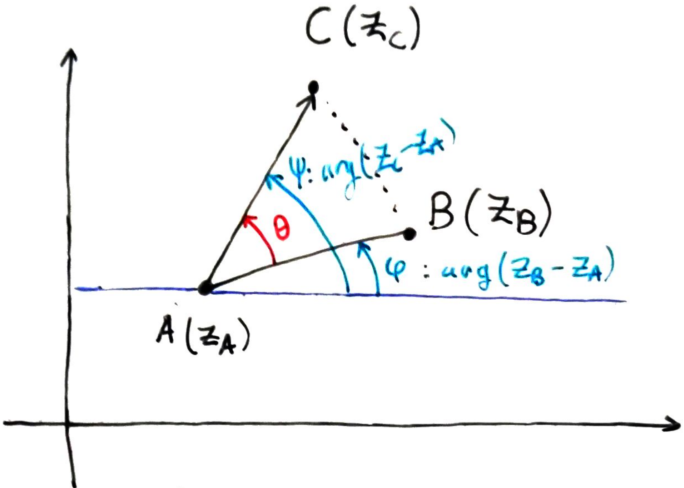
   $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\Phi = z \mapsto az + b$ une similitude directe.

   Alors pour tous $z_A,\ z_B,\ z_C,\ z_D \in \mathbb{C}$ avec $z_C \neq z_D$ on a $\dfrac{\phi(z_A) - \phi(z_B)}{\phi(z_C) - \phi(z_D)} = \dfrac{az_A - az_B}{az_C - az_D} = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$.
   En particulier les modules sont égaux donc les rapports de distances sont préservés, et les arguments sont égaux donc les angles orientés sont préservés.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Soit Φ qui préserve les angles orientés et les rapports de distances, donc telle que :
   $\forall z_A, z_B, z_C \neq z_D \in \mathbb{C},\ \dfrac{\phi(z_A) - \phi(z_B)}{\phi(z_C) - \phi(z_D)} = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On prend $z_A = z$, $z_B = z_D = 0$, $z_C = 1$.
   On a $\dfrac{\phi(z) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} = z$ et donc $\phi(z) = az + b$ en notant $a = \phi(1) - \phi(0)$ et $b = \phi(0)$.

   On aurait aussi pu faire par Analyse-synthèse.

6/2 Plus d'explications



Préserver les angles (2)

$$\forall z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C},\ \mathrm{Arg}(z_C - z_A) - \mathrm{Arg}(z_B - z_A)$$
$$\equiv \mathrm{Arg}(s(z_C) - s(z_A)) - \mathrm{Arg}(s(z_B) - s(z_A)) \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \forall z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C},\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}\right)$$

Préserver les distances

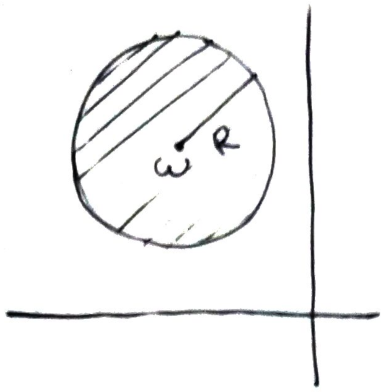
$$\forall z_A, z_B \in \mathbb{C},\ |z_B - z_A| = |s(z_B) - s(z_A)|$$

Préserver les rapports de distances (1)

$$\forall z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C},\ \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}\right|$$

Préserver (1) et (2) :

$\boxed{7/1}$



Considérons un disque ouvert $D_0(\omega, R)$

Montrons qu'il est ouvert

$$D_0(\omega, R) = \{ z \in \mathbb{C}, |z-\omega| < R \}$$

Mq $\forall z \in D_0(\omega, R), \exists \varepsilon > 0, D_0(z, \varepsilon) \subset D_0(\omega, R)$

Soit $z \in D_0(\omega, R)$ ie z est tel que $|z-\omega| < R$

Posons $\varepsilon = R - |z-\omega| > 0$

Soit $d \in D_0(z, \varepsilon)$ ie $|d-z| < \varepsilon$

Mq $d \in D_0(\omega, R)$ ie $|d-\omega| < R$.

$|d-\omega| = |d-z+z-\omega| \leq |d-z| + |z-\omega|$

On a $|d-z| < \varepsilon$ donc $|d-\omega| < \varepsilon + |z-\omega|$

Or $\varepsilon = R - |z-\omega|$ d'où $|d-\omega| < R - |z-\omega| + |z-\omega| < R$

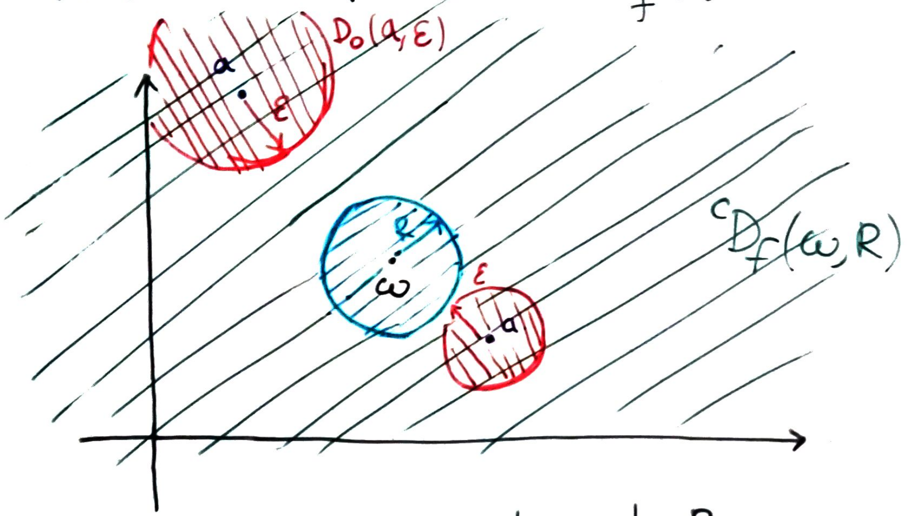
d'où $d \in D_0(\omega, R)$ est ouvert

$$\forall z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C}, \begin{cases} \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}\right) \\ \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\dfrac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}\right| \end{cases}$$

ie $\forall z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C}, \ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}$

$\boxed{7/2}$ Soit $D_f(\omega, R) = \{ z \in \mathbb{C}, \ |z - \omega| \leq R \}$ un disque fermé.

Mq $D_f(\omega, R)$ est fermé ie ${}^cD_f(\omega, R)$ est ouvert



Soit $\alpha \in {}^cD_f(\omega, R)$ ie $|\alpha - \omega| > R$

Posons $\varepsilon = |\alpha - \omega| - R > 0$.

Mq $D_o(\alpha, \varepsilon) \subset {}^cD_f(\omega, R)$

ie $\forall z \in D_o(\alpha, \varepsilon), \ z \in {}^cD_f(\omega, R)$

Soit $z \in D_o(\alpha, \varepsilon)$ ie $|z - \alpha| < \varepsilon$.

Mq $z \in {}^cD_f(\omega, R)$ ie $\neg(|z - \omega| \leq R)$

ie $|z - \omega| > R$.

rpt ITR

$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z-z'| \geqslant ||z|-|z'||$

On a $|z-\alpha| < \varepsilon = |z-\omega| - R$

ie $|z-\omega| = |z-\alpha+\alpha-\omega|$

On pose $\begin{cases} Z := z-\alpha \\ Z' := \omega-\alpha \end{cases}$

On a $|Z-Z'| \geqslant ||Z|-|Z'||$

ie $|z-\omega| \geqslant ||z-\alpha|-|\omega-\alpha||$ (*)

$|z-\alpha| < |z-\omega| - R$ car $|z-\omega|-R = \varepsilon$

ie $|z-\alpha| - |z-\omega| < -R$

ie $||z-\alpha| - |z-\omega|| > R$? $|\cdot|$

donc $|z-\omega| > R$ par Ⓣ avec (*)

On a donc montré $D_o(\alpha, \varepsilon) \subset {}^c D_f(\omega, R)$

Conclusion : $D_f(\omega, R)$ fermé

3. Montrer qu'un disque est convexe.
4. Montrer que $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$ est convexe et est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

1, 3 et 4 : par inégalité triangulaire. 2 : par inégalité triangulaire renversée. On a détaillé 1 en séance, détaillons ici 3 (pour 2 et 4, en séance si vous êtes sages).

Je fais par exemple $B_f(\omega_0, R)$, mais c'est la même chose pour $B_o(\omega_0, R)$

Soient u, $v \in B_f(\omega_0, R)$. On veut montrer $[u, v] \subset B_f(\omega_0, R)$, *i. e.* $\forall t \in [0, 1],\ (1-t)u + tv \in B_f(\omega, R)$.

Soit $t \in [0, 1]$, on a : $|(1-t)u+tv-\omega| = |(1-t)u+tv-((1-t)\omega+t\omega)| = |(1-t)(u-\omega)+t(v-\omega)| \leqslant (1-t)|u-\omega|+t|v-\omega|$ (par inégalité triangulaire et module d'un produit).

Ainsi $|(1-t)u + tv - \omega| \leqslant (1-t)R + tR = R$ *i. e.* $(1-t)u + tv \in B_f(\omega, R)$.

$\boxed{8/1}$ $\mathcal{O}$ ouvert $\Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, \underbrace{\forall z' \in \mathbb{C}, |z-z'| < \varepsilon \Rightarrow z' \in \mathcal{O}}_{D_o(z,\varepsilon) \subset \mathcal{O}}$

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Mq $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est ouverte

Soit $z \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Il existe $i_0 \in I$ tq $z \in \mathcal{O}_{i_0}$. On a $\mathcal{O}_{i_0}$

ouvert donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq pour tout $z' \in \mathbb{C}, |z-z'| < \varepsilon_0$
$\Rightarrow z' \in \mathcal{O}_{i_0}$ $(*)$

On a $O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

Posons $\varepsilon = \varepsilon_0$. Soit $z' \in \mathbb{C}$ tq $|z - z'| < \varepsilon$.

D'après $(*)$, on a $z' \in O_{i_0}$

Donc $z' \in \bigcup_{i \in I} O_i$ par (T).

$\boxed{8/2}$ Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés.

Mq $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermée ie $\complement\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$ est ouvert

On a $\complement\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement F_i$

Or $\forall i \in I$, F_i est fermé

donc $\forall i \in I$, $\complement F_i$ est ouvert

d'après 8/1, $\bigcup_{i \in I} \complement F_i$ est ouvert donc $\complement\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$ d'après De Morgan.

Exercice 8. *Ouverts/fermés*

Je ne sais plus ce qu'on n'avait pas corrigé sur cet exercice.

1. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

   Le copié-collé c'est la vie. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Par définition, il existe alors $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_{i_0}$. Comme $\mathcal{O}_{i_0}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(x,\varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_0}$. Par définition de la réunion on a $\mathcal{O}_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Par transitivité on a donc $B_o(x,\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Et donc par définition, $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert.

   On en déduit qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé par simple application de De Morgan : soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. La famille $({}^c\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts donc $\bigcup\limits_{i\in I} {}^c\mathcal{F}_i$ est ouvert, donc ${}^c\left(\bigcup\limits_{i\in I} {}^c\mathcal{F}_i\right)$ est fermée. Et d'après les lois de De Morgan on a ${}^c\left(\bigcup\limits_{i\in I} {}^c\mathcal{F}_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} {}^{cc}\mathcal{F}_i = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert, mais une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Une réunion finie de fermés est un fermé, mais une réunion infinie de fermés peut ne pas être un fermé.

   Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'ouverts. Soit $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.
   Par définition on a $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x \in \mathcal{O}_i$.
   Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, comme $\mathcal{O}_i$ est ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B_o(x,\varepsilon_i) \subset \mathcal{O}_i$.
   Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. Ce min existe car $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ est un ensemble fini, hypothèse qui est donc essentielle.
   On a : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \varepsilon \leqslant \varepsilon_i$ donc $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ B_o(x,\varepsilon) \subset B_o(x,\varepsilon_i) \subset \mathcal{O}_i$.
   Par définition de l'intersection on a donc $B_o(x,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.

   On en déduit qu'une réunion finie de fermés est un fermé par simple application des lois de De Morgan : soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie de fermés. Ainsi la famille $({}^c\mathcal{F}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est une famille finie d'ouverts donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n} {}^c\mathcal{F}_i$ est ouvert, donc ${}^c\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} {}^c\mathcal{F}_i\right)$ est fermé. Et d'après les lois de De Morgan on a ${}^c\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} {}^c\mathcal{F}_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} {}^{cc}\mathcal{F}_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$.

   Les contre-exemples : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_o(0,\frac{1}{n}) = \{0\}$ n'est pas un ouvert, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} {}^cB_o(0,\frac{1}{n}) = \mathbb{C}^*$ n'est pas un fermé.