Compacité

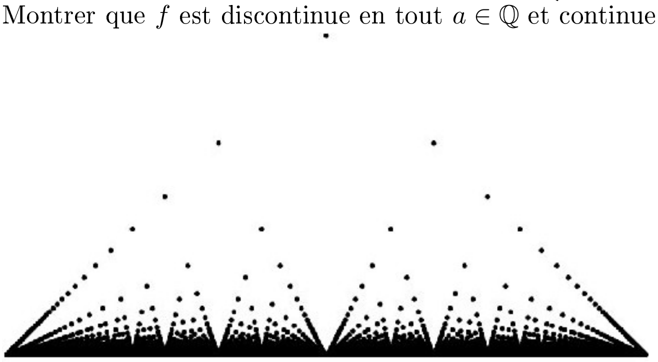
Bolzano-Weierstrass

Exercice 1. *Une caractérisation de la convergence.*

Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si toutes ses sous-suites **qui convergent** ont la même limite.

Exercice 2. *Suite rationnelle de limite irrationnelle.*

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telles que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite qui converge vers x. Montrer qu'on a $q_n \to +\infty$ et $|p_n| \to +\infty$.
   Rappel : si une suite ne tend pas vers $+\infty$ alors elle a une sous-suite majorée.
2. Application : pour tout réel x on note $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } x \text{ a pour écriture irréductible } \dfrac{p}{q} \end{cases}$
   Montrer que f est discontinue en tout $a \in \mathbb{Q}$ et continue en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Heine et Bornes atteintes

Exercice 3. *Autre méthode pour l'uniforme continuité de $\sqrt{\ }$*

1. Justifier rapidement que la fonction $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0, 2]$ et sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : pour $\varepsilon > 0$, on a η_1 associé par UC sur $[0, 2]$ et η_2 associé par UC sur $[1, +\infty[$, on peut alors poser $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, 1)$.*

Exercice 4. *Continuité et bornitude*

On suppose que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifient :

i/ f continue

ii/ g bornée

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 5. *Fonctions bornées*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et sont finies.
   a. Montrer que f est bornée.
   b. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Une de ses deux bornes ?
   c. Mêmes questions si $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Compacité

Exercice 1. *Une caractérisation de la convergence.*

Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si toutes ses sous-suites **qui convergent** ont la même limite.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, bornée. Ainsi, il existe $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b]$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $(u_n)_n$ converge et notons ℓ sa limite. En particulier, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ et donc toutes ses sous-suites qui convergent convergent vers ℓ.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposition. Supposons que la suite $(u_n)_n$ diverge. Comme elle est bornée, elle a cependant une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Notons ℓ la limite de cette sous-suite, on a $\ell \in [a, b]$ par caractérisation séquentielle des fermés (ou, si on préfère, parce que les inégalités larges passent à la limite).
Comme la suite $(u_n)_n$ diverge, en particulier elle ne converge pas vers ℓ, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon \quad (\star)$$

• Pour $n_0 = 0$, on obtient qu'il existe un rang $\psi(0)$ tel que $|u_{\psi(0)} - \ell| \geqslant \epsilon$.
• Pour $n_0 = \psi(0) + 1$, on obtient qu'il existe un rang $\psi(1) > \psi(0)$ tel que $|u_{\psi(1)} - \ell| \geqslant \epsilon$.
• Pour $n_0 = \psi(1) + 1$, on obtient qu'il existe un rang $\psi(2) > \psi(1)$ tel que $|u_{\psi(2)} - \ell| \geqslant \epsilon$.
On construit ainsi, de proche en proche, une extractrice ψ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\psi(n)} - \ell| \geqslant \epsilon$.
La suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_n$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ qui est bornée donc $\left(u_{\psi(n)}\right)_n$ est elle-même bornée. Par conséquent elle a elle-même une sous-suite convergente $\left(u_{\psi(\gamma(n))}\right)_n$ qui vérifie également $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\psi(\gamma(n))} - \ell| \geqslant \epsilon$.
Notons ℓ_2 sa limite.
Par caractérisation séquentielle des fermés appliqué au fermé $[a, \ell - \varepsilon] \cup [\ell + \varepsilon, b]$ (ou si on préfère parce que la fonction valeur absolue est continue et par passage à la limite des inégalités larges) on a $|\ell_2 - \ell| \geqslant \varepsilon$ donc en particulier $\ell_2 \neq \ell$.
Ainsi $\left(u_{\psi(\gamma(n))}\right)_n$ et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ sont deux sous-suite de $(u_n)_n$ qui sont convergentes et qui ne convergent pas vers la même limite, ce qui achève la démonstration de la contraposée du sens réciproque.

Exercice 3. *Autre méthode pour l'uniforme continuité de $\sqrt{\ }$*

1. Justifier rapidement que la fonction $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0, 2]$ et sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : pour $\varepsilon > 0$, on a η_1 associé par UC sur $[0, 2]$ et η_2 associé par UC sur $[1, +\infty[$, on peut alors poser $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, 1)$.*

1. L'intervalle $[0, 2]$ est un segment donc la fonction $\sqrt{\ }$ qui est continue est uniformément continue sur $[0, 2]$ d'après le théorème de Heine.
   Sur $[1, +\infty[$, la fonction $\sqrt{\ }$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. En effet pour $x, a \in [1, +\infty[$ on a $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geqslant 2$ donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|x - a\right|$. En particulier, la fonction $\sqrt{\ }$ est lipschitzienne, donc uniformément continue.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   Par uniforme continuité de $\sqrt{\ }$ sur $[0, 2]$ il existe $\eta_1 > 0$ tel que :
   $$\forall x, a \in [0, 2],\ |x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (\star).$$
   Par uniforme continuité de $\sqrt{\ }$ sur $[1, +\infty[$ il existe $\eta_2 > 0$ tel que :
   $$\forall x, a \in [1, +\infty[,\ |x - a| < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (\star\star).$$
   Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, 1)$. Soient $x, a \in \mathbb{R}_+$ et supposons $|x - a| < \eta$. À renommage prés, on a $x \leqslant a$. On a $|x - a[< \eta$ donc en particulier $|x - a| < 1$, il est donc impossible qu'on ait $x \in [0, 1]$ et $a \in [1, +\infty[$. On a donc seulement deux cas : soit $x, a \in [0, 2]$, soit $x, a \in [1, +\infty[$, dans chaque cas, en utilisant le fait que η est inférieur à η_1 et η_2, et en utilisant $(\star)$ ou $(\star\star)$, on obtient bien $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. ☺

EXMCOMPAT

$\boxed{2/1}$ $\dfrac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \notin \mathbb{Q}$

Par l'absurde Supp $q \not\to +\infty$

Donc d'ap. l'indication q a une sous-suite $q \circ \phi$ majorée disons pour un certain M.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq q_{\phi(n)} \leq M$

Donc $q \circ \phi$ est bornée donc d'après B-W elle a une sous-suite $q \circ \phi \circ \psi$ (qui est une sous-suite de q) convergeante.

$$\ell := \lim_{+\infty} q \circ \phi \circ \psi$$

Or $q \circ \phi \circ \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donc elle est stationnaire

donc $\ell \in \mathbb{N}$

$$p \circ \phi \circ \psi = \underbrace{q \circ \phi \circ \psi}_{\to \ell} \cdot \underbrace{\frac{p \circ \phi \circ \psi}{q \circ \phi \circ \psi}}_{\to x}$$

cerveau cosmique

par thm fondamental des sous-suites car $\frac{p}{q} \to x$

par PAL, $p \circ \phi \circ \psi \xrightarrow[\infty]{} \ell x$

donc $p \circ \phi \circ \psi$ est une suite d'entiers qui converge

donc $p \circ \phi \circ \psi$ converge

donc $\ell x \in \mathbb{Z}$

d'où $x = \dfrac{\ell x}{\ell} \in \mathbb{Q}$

IMP

donc $\boxed{q \longrightarrow +\infty}$

d'où $|q| = \left|q \frac{p}{q}\right|$ cerveau cosmique

$= \underbrace{q}_{+\infty} \underbrace{\left|\frac{p}{q}\right|}_{\to |x| > 0}$ car $q \geqslant 0 \Rightarrow |q| = q$

car $\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \underline{x \neq 0}$

donc $|p| \longrightarrow \infty$ par PAL.

$\boxed{2/2}$ Soit popcorn $= f$

Mq popcorn est discontinue en tout rationnel reel.

Soit $a \in \mathbb{Q}$. Notons $a = \frac{p}{q}$ sont écriture irred.

On a popcorn$(a) = \frac{1}{q}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $v \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ tel que $v \longrightarrow a$

On a alors popcorn $\circ\, v \underset{\text{car } v \notin \mathbb{Q}}{=} 0 \xrightarrow[\infty]{} 0 \neq$ popcorn(a)

Par CSC, popcorn est discontinue en a (contraposée)

Mq popcorn est continue en tout reel irrationnel

Par CSC. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u \xrightarrow[\infty]{} a$

Traitons 3 cas.

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$ ($u \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ ÀPCR):

alors $\text{popcorn}(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \text{popcorn}(a)$ ÀPCR n

$\underline{2^{e}\text{ cas}}$ ($u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ À PCR):

On note $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ écriture irréd ÀPCR n

et $u \longrightarrow a \notin \mathbb{Q}$

D'après 2/1, $q \longrightarrow +\infty$

donc $\text{popcorn} \circ u = \frac{1}{q} \longrightarrow 0 = \text{popcorn}(a)$

$\underline{3^{e}\text{ cas}}$ ($\#(u^{\rightarrow}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{Q}) = +\infty$ et $\#(u^{\rightarrow}(\mathbb{N}) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})) = +\infty$):

Notons $\begin{cases} (u \circ \varphi)^{\rightarrow}(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ (u \circ \psi)^{\rightarrow}(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q} \end{cases}$ } on prend les s-suites $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = \varphi(k)$ xor $n = \psi(k)$

D'après le 1^{er} cas, $\text{popcorn} \circ u \circ \varphi \longrightarrow 0$
2^{e} cas, $\text{popcorn} \circ u \circ \psi \longrightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$. $\begin{cases} \text{Il existe } n_\varphi \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_\varphi, |\text{popcorn} \circ u \circ \varphi - 0| < \varepsilon \\ \text{Il existe } n_\psi \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_\psi, |\text{popcorn} \circ u \circ \psi - 0| < \varepsilon \end{cases}$

Posons $n_0 = \max\{\varphi(n_\varphi), \psi(n_\psi)\}$

Soit $n \geq n_0$.

Ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\begin{cases} n = \varphi(k) \\ \text{xor} \\ n = \psi(k) \end{cases}$

$\underline{1^{er}\text{ CYKA}}$ ($n = \varphi(k)$):

$\varphi(k) \geq n_0 \geq \varphi(n_\varphi)$

$\Rightarrow k \geq n_\varphi$ car $\varphi \in \nearrow$

$\Rightarrow |\text{popcorn}(u_n)| = |\text{popcorn}(u_{\varphi(n)})| < \varepsilon$

2^e CYKA$(n = \varphi(k))$:

$$\varphi(k) \geqslant n_0 \geqslant \varphi(n_\varphi)$$

$\Rightarrow \quad k \geqslant n_\varphi$ car $\varphi \in \not\nearrow$

$$\Rightarrow \left|\text{popcorn}(u_n)\right| = \left|\text{popcorn}(u_{\varphi(n)})\right| < \varepsilon$$

d'où $\quad \text{popcorn} \circ u \longrightarrow 0 = \text{popcorn}(a)$

Exercice 4. *Continuité et bornitude*

On suppose que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifient :

i/ f continue

ii/ g bornée

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Traduisons : « g est bornée » signifie qu'il existe $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ tels que $g(\mathbb{R}) \subset [a, b]$ (c'est une image directe).

1. On a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ par définition (c'est une image directe). En utilisant des propriétés assez immédiates (mais à savoir montrer) de l'image directe, on a $(g \circ f)(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R}) \subset [a, b]$ donc $g \circ f$ est bornée.
2. On a $f([a, b])$ qui est un segment car f est continue. Notons $[\alpha, \beta] = f([a, b])$. En utilisant toujours les mêmes propriétés assez immédiates de l'image directe : $(f \circ g)(\mathbb{R}) = f(g(\mathbb{R})) \subset f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ donc $f \circ g$ est bornée.

Exercice 5. © ★ *Fonctions bornées*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et sont finies.

   a. Montrer que f est bornée.

   On écrira que « f est bornée par K sur I » pour dire : $|f| \leqslant K$ sur I.

   On a $\lim\limits_{-\infty} f$ finie donc d'après le cours f est bornée, disons par K_1, au voisinage de $-\infty$, *i. e.* sur un intervalle de la forme $]-\infty, A]$. On a $\lim\limits_{+\infty} f$ finie donc d'après le cours f est bornée, disons par K_2, au voisinage de $+\infty$, *i. e.* sur un intervalle de la forme $[B, +\infty[$. Si $A \geqslant B$ alors f est bornée par $\max(K_1, K_2)$ sur $\mathbb{R}$, il n'y a rien à faire. Sinon [1] on utilise le théorème des bornes atteintes : f est continue sur $[A, B]$ donc bornée sur $[A, B]$, disons par K_3, et donc f est bornée par $\max(K_1, K_2, K_3)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Une de ses deux bornes ?

   La fonction arctan est un contre-exemple simple aux deux questions.

   c. Mêmes questions si $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$.

   Dans ce cas une des deux bornes est atteinte. On traite deux cas :

   - Soit f est constante. Bon, elle atteint ses deux bornes en tout point, c'est vu.
   - Soit f n'est pas constante. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$. Quitte à changer f en $-f$ (ce qui échange donc borne sup et borne inf), disons qu'on a $f(x_0) > \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$. Un résultat du cours sur les limites assure donc qu'il existe A et B tels que $f < f(x_0)$ sur $]-\infty, A[$ et $f > f(x_0)$ sur $]B, +\infty[$. Par conséquent, on a $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = \sup\limits_{[A,B]} f$ qui est atteint par théorème des bornes atteintes.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
   Pareil qu'à la question précédente, en plus simple : il existe A et B tels que $f > f(0)$ sur $]-\infty, A]$ et sur $[B, +\infty[$ d'après le même résultat du cours sur les limites. Donc $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = \inf\limits_{[A,B]} f$ qui est atteint par thm. des bornes atteintes.

   Autre méthode (c'est une astuce mais recyclable) : on pose $g = \arctan \circ f$. La fonction g vérifie les hypothèses de 1.c. donc atteint une de ses deux bornes, nécessairement son min puisqu'on a $g < \frac{\pi}{2}$. Par stricte croissance de arctan il en est de même pour f.

1. Ce cas englobe en fait l'autre.

EX M COMPACT

$\boxed{6}$

f est bornée et atteint ses bornes d'après le thm des bornes atteintes.

$$\begin{cases} m := \inf\limits_{[a,b]} f \\ M := \sup\limits_{[a,b]} f \end{cases}$$

On a $\quad m \leq f \leq M$

$$\Leftrightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \quad \text{par croissance de } \int$$

$$\Leftrightarrow (b-a)m \leq \int_a^b f \leq (b-a)M$$

Traitons deux cas.

<u>1er cas</u> $(a < b)$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M \quad \text{ie} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f \in [m, M]$$

D'après le TVI sur un fermé (car les bornes sont atteintes), il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

<u>2e cas</u> $(a = b)$:

$$0 \leq \int_a^b f \leq 0 \quad \text{ie} \quad \int_a^b f = 0 \quad \text{donc} \quad f(h) = 0$$

$$\begin{cases} u := \dfrac{\mathrm{id}^{n+1}}{n+1} \\ v := f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \mathrm{id}^n \\ v' = f' \end{cases}$$

$$\int_0^1 t^n f(t)dt = \int_0^1 u'(t)\, v(t)\, dt$$

$$= \left[u \cdot v\right]_0^1 - \int_0^1 u(t)\, v'(t)\, dt \quad \text{car } u,v \in \mathcal{C}^1$$

$$= \left[\frac{\mathrm{id}^{n+1} \cdot f}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt$$

$$=: \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} J_{n+1}$$

(En notant $J_n := \int_0^1 t^n f'(t)\, dt$)

En appliquant 7/1 à f' qui est bien continue, on obtient

$(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ donc $(J_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$

d'où $I_n = \dfrac{f(1)}{n+1} + \dfrac{J_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\big(f(1) + \underbrace{J_{n+1}}_{\to 0}\big)$

Si $f(1) \neq 0$, $f(1) + J_{n+1} \longrightarrow f(1)$

ie $f(1) + J_{n+1} \sim f(1)$

d'où $I_n \sim \frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$

<u>En général</u>,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n+1}\left(f(1) + J_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(f(1) + o(1)\right) \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(f(1) + o(1)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + o(1)\right)\left(f(1) + o(1)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(f(1) + o(1)\right) \\
&= \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{7/3}$ $$I_n = \frac{f(1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt$$

En appliquant le résultat en 7/1 à f' qui est bien $\mathcal{C}^1$ on obtient

$$\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt = \frac{f'(1)}{n+2} - \frac{1}{n+2}\underbrace{\int_0^1 t^{n+2} f''(t)\,dt}_{\longrightarrow\, 0}$$

d'après 7/1 appliqué à f'' qui est bien $\mathcal{C}^0$

d'où $$I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{o(1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{f(1)}{n} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{f'(1)}{n^2} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}$$

$$+ \frac{o(1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{f(1)}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{f'(1)}{n^2}\left(1+o(1)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7/1

TBA^1 f est bornée disons par m et M

car $f \in \mathcal{C}$ et $[0, 1]$ un segment

$$\forall t \in [0, 1], \quad t^n m \leq t^n f(t) \leq t^n M \qquad \text{car } t^n \geqslant 0$$

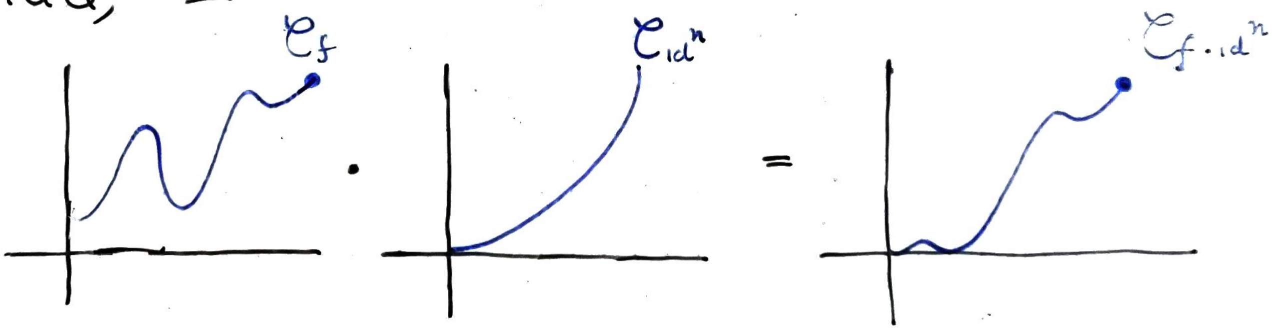
par croissance de $\int$

$$\int_0^1 t^n m \, dt \leq \int_0^1 t^n f(t) \, dt \leq \int_0^1 t^n M \, dt$$

$$\text{ie} \quad \underbrace{\frac{m}{n+1}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \leq I_n \leq \underbrace{\frac{M}{n+1}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Par TdG, $I \longrightarrow 0$

7/2



---

1 Théorème des bornes atteintes

Intégration

Exercice 6. *Égalité de la moyenne*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a \leqslant b$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = (b-a)f(c)$.

Indication : justifier que $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ *et* $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ *existent et appliquer convenablement le TVI.*

Exercice 7. *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, intégrable. On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On suppose $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. On suppose $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $I_n = \frac{f(1)}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$.
   En particulier si on a $f(1) \neq 0$ *alors on a* $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$.
3. On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $I_n = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.