Compacité

la question Peut on passer du local au global ?

Une ppté localement vraie en tout point est-elle vraie globalement ?

→ Well, it depends.

eg Fonction localement bornée au voisinage de chacun de ses points

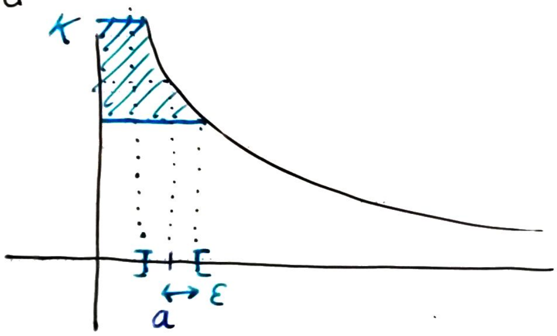
rpl $f : I \to \mathbb{R}$ bornée $\Leftrightarrow \exists K \geq 0, \forall x \in I, \ |f(x)| \leq K$

$f : I \to \mathbb{R}$ localement bornée $\Leftrightarrow$

$$\forall a \in I, \exists K_a \geq 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I, \ |f(x)| \leq K_a$$

eg

- $id_{\mathbb{R}}$ est localement bornée
- $\frac{1}{id} :]0,1[\to]1,+\infty[$ est localement bornée



I Trois théorèmes de compacité

1 Bolzano-Weierstraß

thm De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite conv.

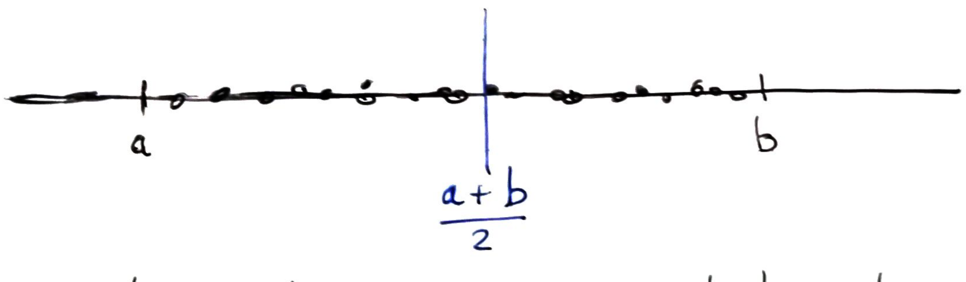
$\forall u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u bornée $\Rightarrow \left(\exists \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{N},\mathbb{N}),\ \lim\limits_{\infty} u\circ\varphi \in \mathbb{R}\right)$

eg

- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc d'après BW, cette suite a une sous-suite convergente
- $\sin:\mathbb{N}$ et $\cos:\mathbb{N}$ sont bornées donc on peut extraire des sous-suites convergentes, il existe $\varphi_{\sin}, \varphi_{\cos} \in \mathcal{E}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ tq $(\sin \varphi_{\sin}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos \varphi_{\cos}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent

dem par dichotomie.

Soit $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supposons u bornée ie il existe $a<b\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ a\leq u_n\leq b$



On construit deux suites a_n et b_n et une extractrice φ par récurrence

Init $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

Her étant construits a_n, b_n et $\varphi(n)$

Notons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Traitons deux cas.

- Il existe une infinité de termes de la suite $(u_k)_k$ dans l'intervalle $[a_n, c_n]$

$$\begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \\ \varphi(n+1) := \min\left\{k > \varphi(n), u_k \in [a_n, c_n]\right\} \end{cases}$$

- Sinon il existe une infinité de termes de la suite $(u_k)_k$ dans $[c_n, b_n]$

$$\begin{cases} a_{n+1} := c_n \\ b_{n+1} := b_n \\ \varphi(n+1) := \min\left\{k > \varphi(n), u_k \in [c_n, b_n]\right\} \end{cases}$$

Par construction, on a

$$\begin{cases} \varphi \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \\ a \in \nearrow \\ b \in \searrow \\ a - b = \dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n] \end{cases}$$

Ainsi a et b sont adjacentes donc

$$\lim_{\infty} a = \lim_{\infty} b =: \ell$$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ donc par TdG, $u \circ \varphi \longrightarrow \ell$

Ce n'est pas "un thm sur les suites"
C'est un outil de calcul

app

Mtq Si I est un segment $[a, b]$ et que $f : I \to \mathbb{R}$ et localement bornée alors f est bornée

par l'absurde : Supp f localement bornée mais non bornée

$\forall K \geq 0, \exists x \in I, \ |f(x)| > K$

Pour $K = 1$ on obtient $x_1 \in I, \ |f(x)| > 1$

$K = 2$ ——————— $x_2 \in I, \ |f(x)| > 2$

$\vdots$

$K = n$ ——————— $x_n \in I, \ |f(x)| > n$

donc $|f \circ x| \to +\infty$. $(x_n)_n$ est bornée (à valeurs dans I)

d'ap BW, elle a une ss-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente

Notons $\ell := \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)}$

On a $\ell \in [a, b]$ par caractérisat° séq$^{\ell}$ des fermés

Come $|f \circ x \circ \varphi| \longrightarrow +\infty$, il n'existe aucun voisinage de ℓ sur lequel f est bornée ! ~~imp~~

thm Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{C}$

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \left(\vec{u}(\mathbb{N}) \subset D_f(?,?)\right) \Rightarrow \exists \varphi \in \not\nearrow(\mathbb{N},\mathbb{N}), \lim_{\infty} u \circ \varphi \in \mathbb{R}$$

rpl $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \exists k \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k$

dem

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $K \geq 0$ pour lequel $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$

$$\begin{cases} x := \mathrm{Re} \circ u \\ y := \mathrm{Im} \circ u \end{cases}$$

On a $\begin{cases} |x| \leq K \\ |y| \leq K \end{cases}$

- x est bornée donc d'après B-W il existe $\varphi \in \not\nearrow(\mathbb{N},\mathbb{N})$ tq $x \circ \varphi$ converge

⚠ Ne pas faire la même chose avec y.

- $y \circ \varphi$ est bornée donc d'après BW il existe $\psi \in \not\nearrow(\mathbb{N},\mathbb{N})$ tq $y \circ \varphi \circ \psi$ converge

On a ainsi: $x \circ \varphi \circ \psi$ converge par théorème fondamental des sous-suites.

Ainsi $u \circ \varphi \circ \psi$ converge par PAL et est une sous-suite de u

car $\varphi \circ \psi \in \not\mathcal{L}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

2 Théorèmes des bornes atteintes

thm

Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

f est bornée et ses bornes sont atteintes.

dem

$$\begin{cases} M := \sup_{\overline{\mathbb{R}}} f \\ m := \inf_{\overline{\mathbb{R}}} f \end{cases}$$ Ils existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Mtq M, m sont atteints par f

Il existe une suite $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, f^{\rightarrow}([a,b]))$ tq $u \to M$.

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $u_n = f(x_n)$.

Ainsi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tq $f \circ x \longrightarrow M$

Or x est bornée donc d'après BW elle a une sous-suite $x \circ \varphi$ convergeante.

$c := \lim_{\infty} x \circ \varphi \in [a,b]$ par CSF.

$f \circ x \circ \varphi \longrightarrow f(c)$. par CSC

$M = f(c)$ par [unicité] de lim
et thm généraux des sous-suites

donc f atteint sa borne sup

de même f atteint son inf

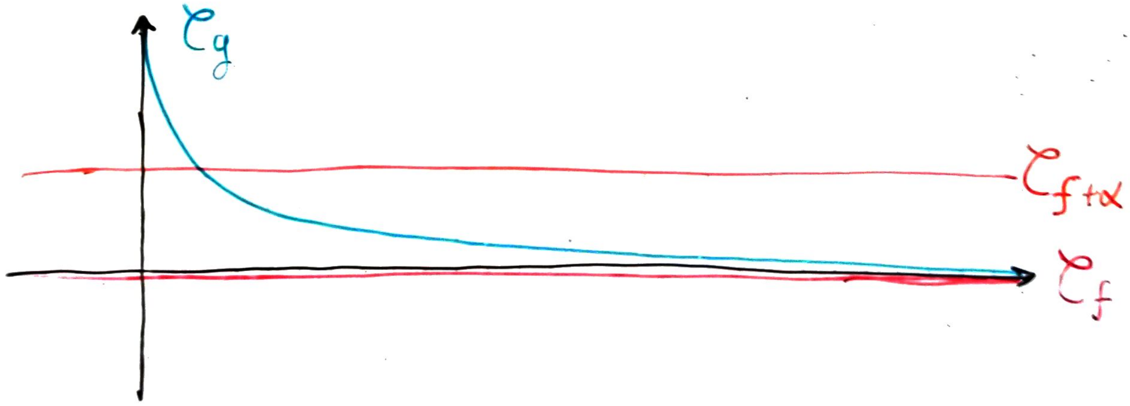
app

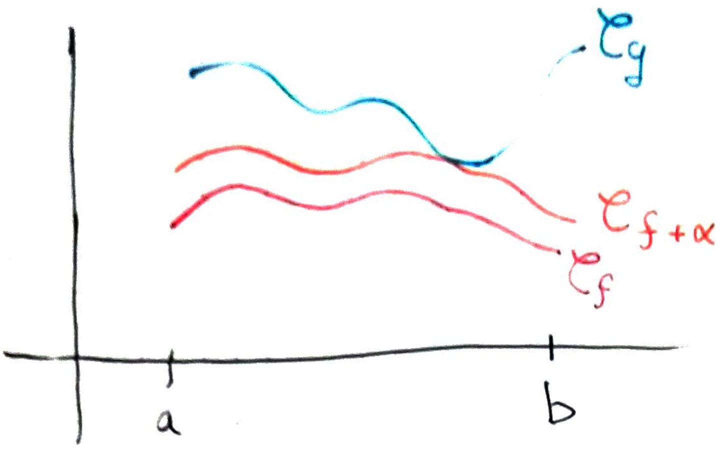
Soient $f < g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Il existe $\alpha > 0$ tq

$\forall x \in [a,b],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$

⚠ Si on n'est pas sur un fermé borné, ça ne marche pas

eg
$$\begin{cases} f := x \mapsto 0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*} \\ g := \dfrac{1}{\mathrm{id}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*} \end{cases}$$





Posons $h := g - f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+^*)$ par thm généraux.

$h^{\to}([a,b]) = \mathbb{R}_+^*$ car $f < g$ sur $[a,b]$ ie $g - f > 0$ sur $[a,b]$

D'après le thm des bornes atteintes h est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, elle atteint son inf

Notons $\alpha := \inf h = h(c)$, $c \in [a,b]$ donc $\alpha > 0$

On a bien $\forall x \in [a,b],\ f(x) + \alpha \leqslant g(x)$

remq Si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ il reste vrai que f est bornée

Mais ça n'a pas de sens que f "atteigne ses bornes"

($|f|$ est bornée et atteint ses bornes)

thm *Image d'un segment*

$\mathcal{C}^{\to}$(segment) est un segment dem

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $[a,b] \subset I$
Alors $[a,b]$ est un intervalle

Par TVI, $f^{\rightarrow}([a,b])$ est un intervalle

- Si $f^{\rightarrow}([a,b])$ est de la forme $]m, M[$ alors f n'atteint pas son inf !
- — ——— $[m, M[$ ———
  — . sup
- ——— $]m, M[$ ———
  ni son sup ni son inf
- Donc $f^{\rightarrow}([a,b])$ est de la forme $[m, M]$ est un segment

remq

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ avec $[a,b] \subset I$ alors

$f^{\rightarrow}([a,b])$ n'est pas nécessairement un segment
mais c'est nécessairement un fermé borné

eg

$$e^{i\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{}^{\rightarrow}([0, 2\pi]) = \mathbb{U}$$

3 Théorème de Heine

thm

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors f est UC

" Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue "

dem par l'absurde

Supposons $\begin{cases} f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \\ f \notin U\mathcal{C} \end{cases}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists (x,y) \in [a,b]^2, \ |x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Pour $\eta = 1$, on obtient $x_1, y_1 \in [a,b]$ tq $\begin{cases} |x_1 - y_1| < \eta \\ |f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon \end{cases}$

⋮ récurrence immédiate

Pour $\eta = n$, on obtient $x_n, y_n \in [a,b]$ tq $\begin{cases} |x_n - y_n| < \eta \\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \end{cases}$

On a ainsi: $\begin{cases} (x_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}} \\ (y_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}} \end{cases}$

telles que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \end{cases}$

Ainsi $x - y \to 0$

x est bornée par a et b donc d'après BW

x a une sous-suite $x \circ \varphi$ convergente

On a $x \circ \varphi - y \circ \varphi \to 0$ par théorème fondamental sur les suites

$\ell := \lim\limits_{\infty} x \circ \varphi$

$y \circ \varphi = x \circ \varphi - (x \circ \varphi - y \circ \varphi)$

On a $\ell \in [a, b]$ par CSF

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f \circ x \circ \varphi - f \circ y \circ \varphi| \geq \varepsilon$

Par CSC $\begin{cases} f \circ x \circ \varphi \longrightarrow f(\ell) \\ f \circ y \circ \varphi \longrightarrow f(\ell) \end{cases}$

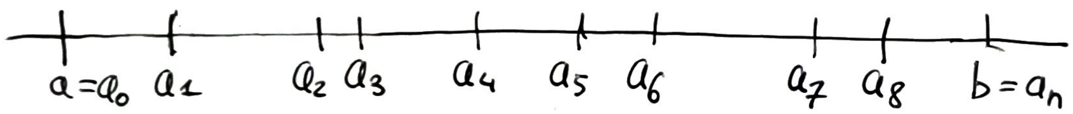
Par PAL, $|f \circ x \circ \varphi - f \circ y \circ \varphi| \longrightarrow 0$

Les $\geq$ passent à lim donc $\varepsilon \leq 0$

app Les fonctions dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ peuvent être "bien approchées" par des fonctions en escalier

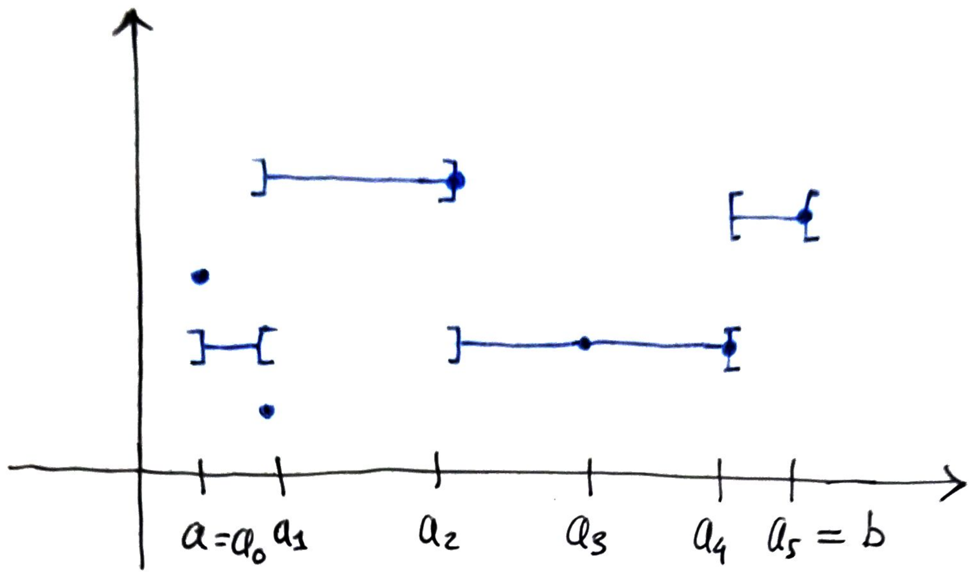
def subdivision de $[a, b]$

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tq $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$



def fonction escalier $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Il existe une subdivision de $[a, b]$ tq $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$,
$f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est constante



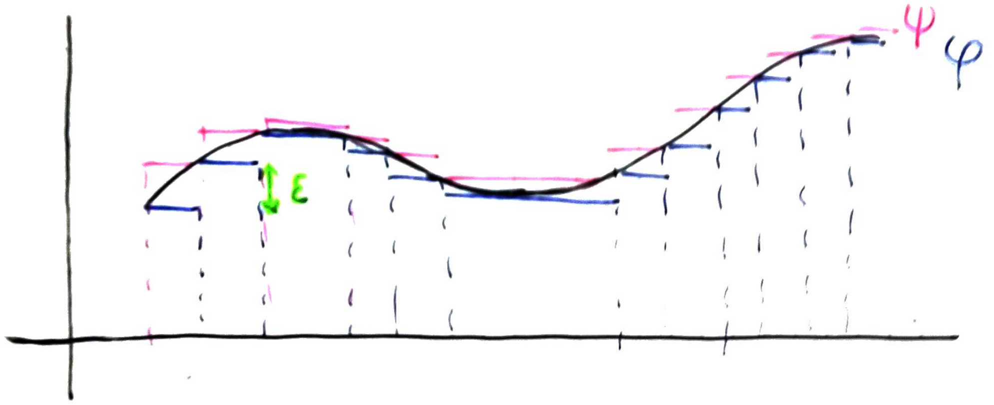
a = a0 a1 a2 a3 a4 a5 = b

def bien approcher

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que

$$\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ \psi - \varphi < \varepsilon \end{cases}$$



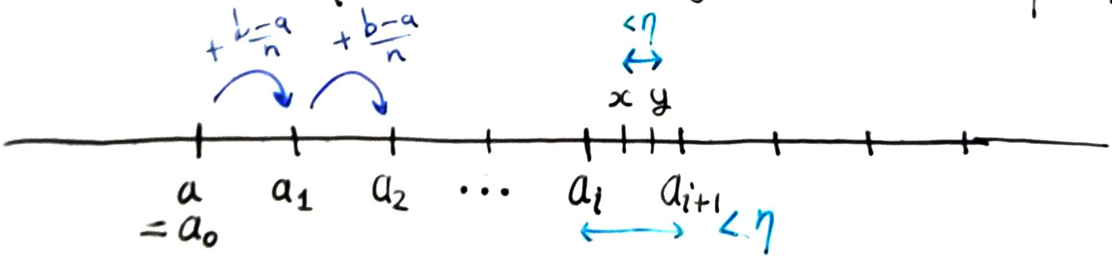
dem Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un découpage tq

$$\sup_{[a_i, a_{i+1}]} f - \inf_{[a_i, a_{i+1}]} f < \varepsilon$$

On a f continue sur le segment $[a,b]$ donc, d'après Heine, f est UC

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$



Trouvons $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{b-a}{n} < \eta$

Il suffit de poser $n = \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$

Posons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k := a_k + k\frac{b-a}{n}$

Ainsi $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une subdivision régulière de $[a, b]$.

On définit φ et ψ par:

$$\forall k \in [\![0, n[\![, \quad \begin{cases} \varphi_{|[a_k, a_{k+1}[} = \inf\limits_{[a_k, a_{k+1}]} f \\ \psi_{|[a_k, a_{k+1}[} = \sup\limits_{[a_k, a_{k+1}]} f \end{cases}$$

et $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$

Soit $t \in [a, b[$. Alors il existe $k \in [\![0, n[\![$ tel que $t \in [a_k, a_{k+1}[$

$f \in \mathcal{C}([a, b] \dots)$ donc $f \in \mathcal{C}([a_k, a_{k+1}[, \dots)$

Par TBA, il existe $x \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que $\varphi(t) = \inf\limits_{[a_k, a_{k+1}]} f = f(x)$

De même, il existe $y \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que $\psi(t) = \sup\limits_{[a_k, a_{k+1}]} f = f(y)$

Donc $\psi(t) - \varphi(t) = f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

car $x, y \in [a_k, a_{k+1}]$ donc $|y - x| \leq \frac{b-a}{n} \leq \eta$

De plus $\psi(b) - \varphi(b) = 0 < \varepsilon$

Ainsi $\forall t \in [a,b],\ \psi(t) - \varphi(b) < \varepsilon$

De plus, par construction :

$$\forall t \in [a,b],\quad \varphi(t) \leq f(t) \leq \psi(t)$$

II Applications en calcul intégral

1 Construction de l'intégrale

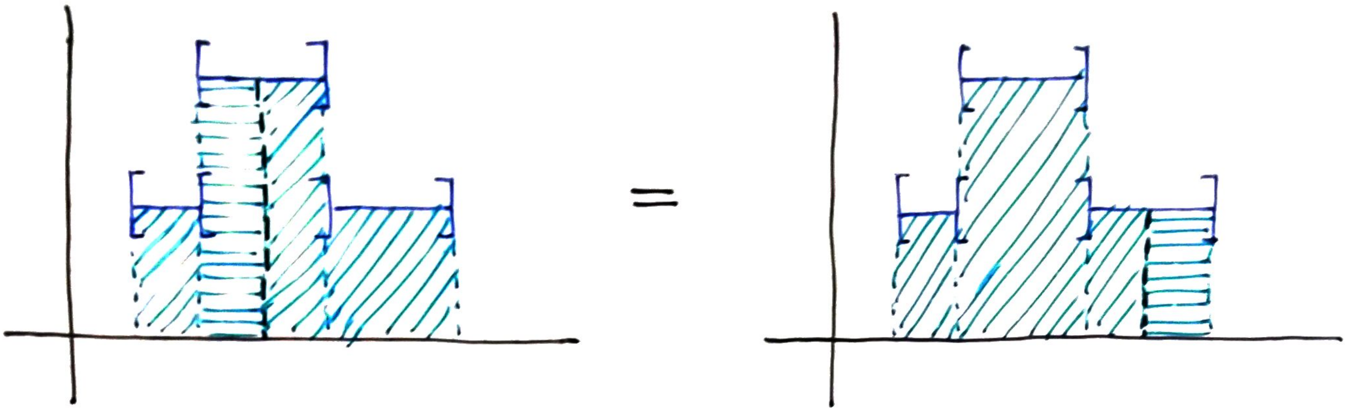
prop-def

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à φ (ie telle que $\forall i \in [\![0, n[\![,\ \left(\varphi|_{]a_i, a_{i+1}[}\right)' = 0$)

On appelle intégrale de φ entre a et b le réel

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\underbrace{y_k}_{\varphi(a)\ \forall a \in]a_k, a_{k+1}[}$$

dem ne dépend pas de la subdivision choisie



C'est vrai par distributivité de $\times$ sur $+$

def Intégrabilité de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{\sup \left\{ \int_a^b \varphi, \begin{cases} \varphi \text{ en escalier} \\ \varphi \leq f \end{cases} \right\}}_{=: I_+(f)} = \underbrace{\inf \left\{ \int_a^b \psi, \begin{cases} \psi \text{ en escalier} \\ \psi \geq f \end{cases} \right\}}_{=: I_-(f)}$$

notn

$$\begin{cases} I_+(f) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi, \begin{cases} \varphi \text{ en escalier} \\ \varphi \leq f \end{cases} \right\} \\ I_-(f) := \inf \left\{ \int_a^b \psi, \begin{cases} \psi \text{ en escalier} \\ \psi \geq f \end{cases} \right\} \end{cases}$$

remq Pour une fonction f en escalier, on retrouve la déf. précédente.

thm

$$f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ intégrable}$$

dem

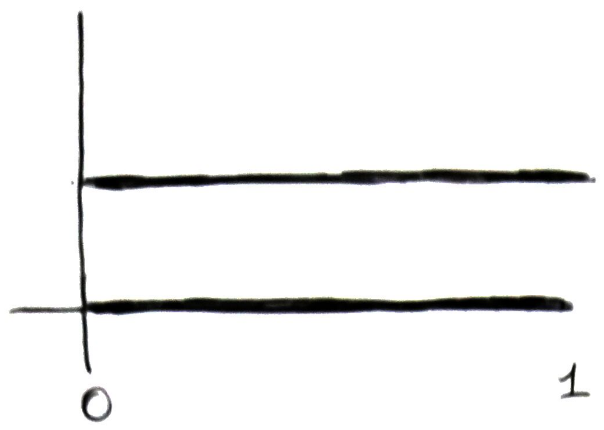
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'app du thm Heine, il existe φ_n, ψ_n en escalier telles que $\begin{cases} \varphi_n \leq f \leq \psi_n \\ \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \end{cases}$

- $$\begin{aligned} I_+(f) - I_-(f) &\leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n \\ &= \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \\ &\xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

- $I_+(f) - I_-(f) \longrightarrow I_+(f) - I_-(f)$

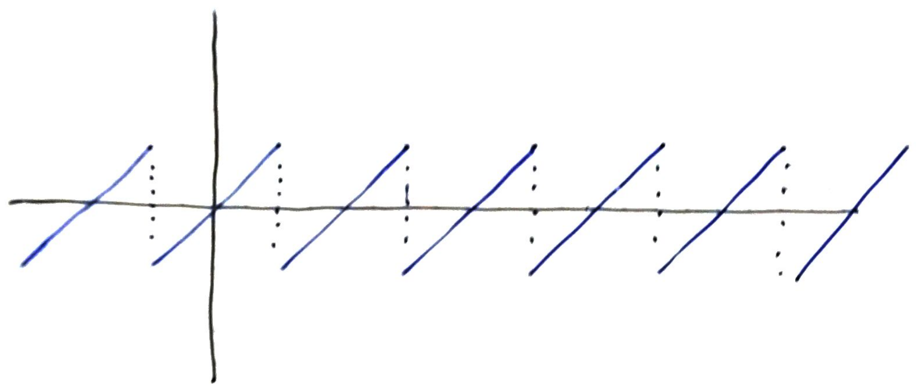
Par unicité de la limite, $I_+(f) = I_-(f)$

⚠ $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Rienmann sur $[0,1]$



$I_+(\chi_{\mathbb{Q}}) = 1 \neq 0 = I_-(\chi_{\mathbb{Q}})$

pb on veut intégrer...



def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,b]$

Il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ tq :

$$\forall k \in [\![0, n[\![, \quad \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \in \mathcal{C} \\ f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ a un prolongement par continuité sur } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

notn ensemble des fonctions continues par morceaux

$$\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$$

thm

$$f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ intégrable}^{1}$$

Jem *idée*

Utiliser le théorème d'approximation sur chaque morceau.

2 Propriété essentielles de $\int$

thm

1. Croissance (dé) sur $\mathcal{C}_{pm}$

$$\forall f,g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}),\ f \overset{\geq}{\leq} g \Rightarrow \int_a^b f \overset{\geq}{\leq} \int_a^b g$$

2. Stricte (dé)croissance sur $\mathcal{C}$

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ f \overset{>}{<} g \Rightarrow \int_a^b f \overset{>}{<} \int_a^b g$$

---

[1] Au sens de Rienmann

notn ensemble des fonctions continues par morceaux

$$\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$$

thm

$$f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ intégrable}$$ [1]

Jem idée

Utiliser le théorème d'approximation sur chaque morceau.

2 Propriété essentielles de $\int$

thm

1. (dé) Croissance sur $\mathcal{C}_{pm}$

$$\forall f,g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}),\ f \overset{\geq}{\leq} g \Rightarrow \int_a^b f \overset{\geq}{\leq} \int_a^b g$$

2. Stricte (dé) croissance sur $\mathcal{C}$

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ f \overset{>}{<} g \Rightarrow \int_a^b f \overset{>}{<} \int_a^b g$$

---

[1] Au sens de Rienmann

3. Linéarité sur $\mathcal{C}_{pm}$

$$\forall f,g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Ceci reste vrai pour $a<b$.

4. Chasles sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$

$$\forall f \in \mathcal{C}_{pm}, \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

5. Inégalité triangulaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$

$$\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}), \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

dem idée

- $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$ pour les fonctions escaliers
- On en déduit le résultat avec le thm d'approx

thm positivité de $\int$

1. sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$ $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}), 0 \leq f \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f$

2. Stricte positivité sur $\mathcal{C}$ $\forall f \in \mathcal{C}$, $f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

3. $\int$ est définie-positive sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \begin{cases} f\geq 0 \\ \int_a^b f=0 \end{cases} \Rightarrow f=0$$

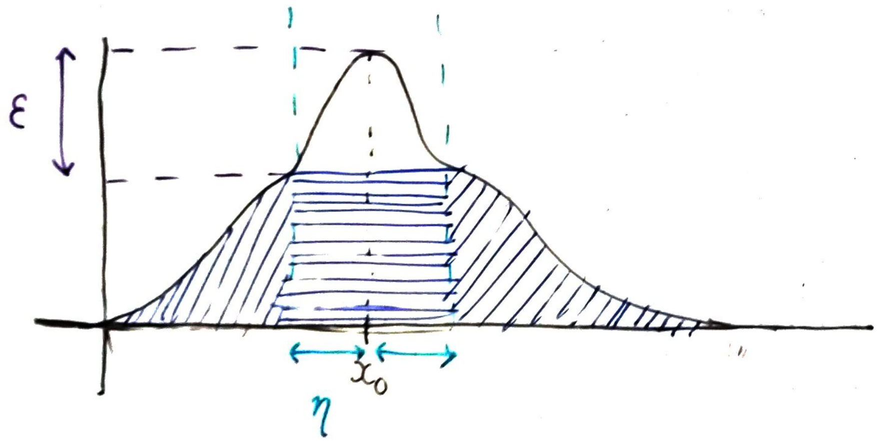
<u>dem</u>

3 idée

Meth 1 On utilise le TFA

Meth 2 Par l'absurde

Si f n'est pas la fonction nulle, il existe $x_0\in[a,b]$ tq $f(x_0)>0$



<u>thm</u> CauchY-SChwArZ pour les intégrales

Soient $a<b\in\mathbb{R}$

$$\forall f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \left(\int_a^b fg\right)^2\leq\int_a^b f^2\int_a^b g^2$$

dem

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

1^er cas ($f=0$ ou $g=0$) : OK ! $(0 \leq 0)$

2^e cas ($f \neq 0$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f + g)^2 \geqslant 0 \quad \text{par positivité de } \int$$

De plus :

$$\int_a^b \lambda^2 f^2 + 2\lambda f g + g^2$$

$$= \left(\int_a^b f^2\right)\lambda^2 + \left(2\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2$$

Ainsi $P(\lambda)$ est un trinôme en λ qui ne change pas de signe donc son discriminant est négatif, ie

$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0$$

ie $$4\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

remq cas d'égalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 = \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R},\ P(\lambda_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R},\ \int_a^b \underbrace{(\lambda f + g)^2}_{\in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R},\ (\lambda_0 f + g)^2 = 0 \quad \text{par définie-positivité}$$

$$\Leftrightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R},\ g = -\lambda_0 f$$

$$\Leftrightarrow f \propto g$$

3 Théorème fondamental de l'Analyse

thm TFA_1

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\alpha \in [a,b]$.

$$F := \begin{cases} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_\alpha^x f \end{cases}$$ est l'unique primitive de f s'annulant en α.

dem

Montrons que $F \in \mathcal{D}$ et $F' = f$

Soit $x_0 \in [a,b]$. Mq $\begin{cases} F \in \mathcal{D}(\{x_0\}, \dots) \\ F'(x_0) = f(x_0) \end{cases}$

ie $$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$$

Pour $h \neq 0$ mais assez petit on a

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_\alpha^{x_0+h} f - \int_\alpha^{x_0} f$$
$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

D'après le TBA, comme f continue sur $[x_0, x_0+h]$, elle y est bornée et y atteint sa borne, ie

il existe $\begin{cases} x_h \in [x_0, x_0+h] \\ y_h \in [x_0, x_0+h] \end{cases}$, $\begin{cases} \sup\limits_{[x_0, x_0+h]} f = f(x_h) \\ \inf\limits_{[x_0, x_0+h]} f = f(y_h) \end{cases}$

Ainsi $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(y_h)\,dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_h)\,dt$ car $\int \in \nearrow$

Pour $h>0$

$$f(y_h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_h)$$

- $x_0 \leq x_h \leq x_0+h \Rightarrow x_h \xrightarrow[h\to 0]{} x_0 \Rightarrow f(x_h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$ par CSC
- $x_0 \leq y_h \leq x_0+h \Rightarrow y_h \xrightarrow[h\to 0]{} x_0 \Rightarrow f(y_h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$ par CSC

D'après le TdG, $\displaystyle\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x_0)$

De même $\displaystyle\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} f(x_0)$

d'où $\displaystyle\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$

4 Convergences des sommes de Riemann

def

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

$$\begin{cases} S_n(f) := \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \\ R_n(f) := \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \end{cases}$$

thm

1. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f$

2. $f \in k\mathcal{L}$ pour $k>0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left|\int_a^b f - S_n(f)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ \left|\int_a^b f - R_n(f)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

dem

2. Par hypothèse, $\forall x,y \in [a,b], \ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f - S_n(f)\right| &= \left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a_i)\right| \\
&= \left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)dt\right| \quad \text{d'après Chasles} \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(f(t)-f(a_i)\ dt\right)\right| \quad \text{par linéarité de } \textstyle\sum \text{ et } \int \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(f(t)-f(a_i)\ dt\right)\right| \quad \text{par ITG} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t)-f(a_i)|\ dt \quad \text{par ITI}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} k|t-a_i| \, dt \qquad \text{car } f \in k\text{-}\mathcal{L}$$

$$= k \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} k(t-a_i) \, dt$$

$$\leq k \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} a_{i+1} - a_i \, dt$$

$$= k \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$= \frac{k(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1}$$

$$= \frac{k(b-a)^2}{n}$$

1. D'après Heine $f \in UC$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b], \ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\frac{b-a}{n} < \eta$ (eg $n = \lfloor \frac{b-a}{\eta} + 1 \rfloor$)

$$\left| \int_a^b f - S_n(f) \right| = \left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \right|$$

$\vdots$ cf. 2.

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(a_i)| \, dt$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt \qquad \text{car } |t-a_i| < \eta$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \times \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1$$

$$= \varepsilon$$

$\square$