EX M CCINP

$\boxed{95}$

1. (a)

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

X est obtenu en comptant le nombre de succès lorsqu'on répète 5 fois une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{5}$ donc

$$X \sim \mathcal{B}(5, \tfrac{1}{5})$$

$$E(X) = np = 1$$
$$V(X) = npq = \frac{4}{5}$$

1 (b)

$$Y = 2X - 3(5-X)$$
$$= 5X - 15$$

$$Y(\Omega) = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$$

$$P(Y=y) = P\left(X = \frac{y+15}{5}\right)$$
$$= \binom{5}{\frac{y+13}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{y+15}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{10-y}{5}}$$

$$E(Y) = E(5X-15)$$
$$= 5E(X) - E(15)$$
$$= -10$$

$$V(Y) = V(5X-15) = 25\,V(X) = 20$$

2.(a)

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5)$$

Avec N_i = "la i^e boule tirée est unique"
$A_i = {}^c N_i$ = "la i^e boule tirée est noire"

$$P(X=0) = P(N_1)P(N_2 | N_1)P(N_3 | N_1 \cap N_2) \cdots P(N_5 | \bigcap_1^5 N_\cdot) \quad \text{par FPC}$$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$P(X=1) = P\left(\coprod_{i=1}^{5} N_1 \cap \cdots \cap B_i \cap \cdots \cap N_5\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} P(N_1 \cap \cdots \cap B_i \cap \cdots \cap N_5)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{8 \cdot 7 \quad 6 \quad 5 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$= 5 \, \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2}}{\cancel{10} \cdot 4 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = \frac{2}{9}$$

2.(b)

$Y(\Omega) = -5[\![1, 3]\!] = \{-15, -10, -5\}$

$P(Y = -15) = 2/9$; $P(Y = -10)$ $5/9$; $P(Y = -5) = 2/9$

EX M CCINP

$\boxed{99}$

1. $\begin{cases} X \text{ v.a.r.} \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right|\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$$

On prend $X = \frac{S_n}{n}$. $\quad E(X) = E\left(\frac{Y_1 + \quad + Y_n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n}\left(E(Y_1) + \cdot \quad + \underbrace{E(Y_n)}_{E(Y_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{n} n E(Y_1) = E(Y_1)$$

On prend $\varepsilon = a$. B-T donne

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{a^2}$$

Or $\begin{cases} V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) \\ V(S_n) = V(Y_1 + \cdots + Y_n) \end{cases}$

Or $Y_1 + \cdots + Y_n$ sont mutuellements indéps. donc

$$V(Y_1 + \cdots + Y_n) = V(Y_1) + \quad + \underbrace{V(Y_n)}_{V(Y_1)} = n V(Y_1)$$

D'où $\dfrac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{a^2} = \dfrac{\frac{1}{n^2} n V(Y_1)}{a^2} = \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$

3

$0,4 = E(Y_i)$ c'est le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par les Y_i. La proportion de rouges tirées est $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$

$$= \frac{S_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{n} - \underbrace{0,4}_{E(Y_1)} \leq a \iff \underbrace{0,35}_{0,4-a} \leq \frac{S_n}{4} \leq \underbrace{0,45}_{0,4+a}$$

On prend $a = 0,05$. D'après 2., $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0,4\right| \geq 0,05\right)$

$$\leq V(Y_1)/na^2$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,6}{n\, 0,05^2}$$

Il suffit de trouver n tq $\frac{0,4 \cdot 0,6}{n\, 0,05^2} \leq 0,05$

ie $n \geq \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,05^3}$

ie $n \geq \frac{\lceil 0,4 \cdot 0,6 \rceil}{0,05^3} = 1920$

EXO CCINP

$\boxed{101}$

1. Soient $\begin{cases} (A_1, \dots, A_n) \text{ sce de probas } \neq 0 \\ B \text{ un évènement de proba } \neq 0 \end{cases}$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)}$$

Dem

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{P(B)}$$

$\cdot P(B|A_k) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)}$ par commutativité de $\cap$

ie $P(A_k \cap B) = P(A_k) P(B|A_k)$

Or $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$ par FPT.

2. (a) Soient

$\begin{cases} B = \text{“le dé a donné 6”} \\ A = \text{“le dé est pipé”} \end{cases}$

Dans le sce $(A, {}^cA)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(A) P(B|A) + P({}^cA) P(B|{}^cA)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{24}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

2. (b)

Notons B_k = "le k-ième lancé a donné 6"

Dans le sce$(A, \complement A)$:

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(A)\,P(B_n \mid A)}{P(A)\,P(B_n \mid A) + P(\complement A)\,P(B_n \mid \complement A)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{3}{\cancel{4}}\underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{(1/6)^n}}$$

$$= \frac{1}{1+3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \underline{1}$$

2. (c) lol. Si n <u>grand</u> dé pipé nec. On ne la fait pas.

107

1. (U_1, U_2) forme un sce.

$$p_1 = P(B_1)$$

$$= P(U_1)P(B_1|U_1) + P(U_2)P(B_1|U_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4+3}\right)$$

$$= \frac{17}{35}$$