EXM CCINP

87

1. Mq $\exists!\, P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$

Notons pour $i \in [\![0, n]\!]$

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

On peut retrouver après une A/S que c'est l'unique poly tq $P(a_i) = \delta_{ij}$

Mq $\mathcal{L} := (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$

$\#\mathcal{L} = n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ donc il suffit de montrer la liberté.

CL nulle $\lambda_0 L_0(X) + \dots + \lambda_n L_n(X) = 0$, évaluons en a_i
$\Rightarrow \lambda_i = 0$

d'où la liberté

Par définition d'une base, $\overset{\text{def}}{\exists!}\, P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P_{|\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

et ce polynôme est $b_0 L_0(X) + \dots + b_n L_n(X) =: P(X)$

et il vérifie $P(a_i) = b_i$

2. Qui est P si $(b_0, \dots, b_n) = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i^{\text{ème}}}, 0, \dots, 0)$

$$P = 0 L_0 + \dots + 0 L_{i-1} + L_i + 0 L_{i+1} + \dots + 0 L_n$$
$$= L_i$$

$\boxed{3}$

$P_{|\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$ donc $X^p_{|\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} a_0^p \\ \vdots \\ a_n^p \end{pmatrix}$

ie $X^p = a_0^p L_0(X) + \quad + a_n^p L_n(X)$