CCINP 79

thm TFAl ?

Si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, alors f a une primitive F et $\int_a^b f = [F]_a^b$

1. Notons H a une primitive de h

$H' = h > 0 \Rightarrow H \in \mathcal{L}$

$$0 = \int_a^b h = H(b) - H(a)$$
$$\Rightarrow H(a) = H(b)$$

Soit $x \in [a,b]$

$$H \in \mathcal{L} \Rightarrow H(a) \leq H(x) \leq H(b) = H(a)$$
$$\Rightarrow H(x) = H(a) \quad \text{par (A) de } \geqslant$$
$$\Rightarrow H' = h = 0$$

3.

$$\int_0^1 \sqrt{\cdot} \circ \exp \circ -\mathrm{id} \leq \sqrt{\left(\int_0^1 \sqrt{\cdot}^2\right)} \sqrt{\left(\int_0^1 (\exp \circ -\mathrm{id})^2\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\int_0^1 \mathrm{id}\right)} \sqrt{\left(\int_0^1 (\exp \circ -\mathrm{id})^2\right)}$$