EXM CCINP

$\boxed{73/1}$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x-y \end{pmatrix}
\end{array}$$

On résout $\begin{cases} 2x+y = \lambda x \\ 4x - y = \lambda y \end{cases}$

ie $\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ 4x - (\lambda+1)y = 0 \end{cases}$

le déterminant est

$$(2-\lambda)(-(\lambda+1)) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6$$
$$= (\lambda+2)(\lambda+3)$$

<u>1er cas</u> $(\lambda \notin \{2,3\})$

le det est non nul.

le système en (x,y) a une unique solution

$$(x,y) = (0,0)$$

2e cas ($\lambda = -2$):

le système devient $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

ie $y = -4x$

Pour $\lambda = -2$: solutions $= \{(x, -4x), x \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathbb{R}}_{\text{ma notation}}$

3e cas ($\lambda = 3$):

le système devient $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$

ie $x = y$

Pour $\lambda = 3$, solutions $= \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}}_{\text{ma notation}}$

Conclusion

$$\text{solutions} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \notin \{2, 3\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ -4x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{73/2}$

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} f_A = A$$

mais $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f_A = \begin{pmatrix} A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{B}} & A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{B}} & -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ie $\begin{pmatrix} 3a & -2b \\ 3c & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -2c & -2d \end{pmatrix}$

ie $\begin{cases} 3a = 3a \\ -2b = 3b \\ 3c = -2c \\ -2d = -2d \end{cases}$

ie $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Les matrice diagonales qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

sont les matrices diagonales.

matrices diagonales forme un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
de dimension 2

On a $A = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$= P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P$ avec $P := P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

M commute avec A $\Leftrightarrow AM = MA$

$\Leftrightarrow P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} PM = MP^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P$

$\Leftrightarrow \cancel{PP^{-1}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} PM = PMP^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} PMP^{-1} = PMP^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow PMP^{-1}$ commute avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \underbrace{M}_{P^{-1}NP} \longmapsto \underbrace{PMP^{-1}}_{N} \end{cases}$$ est un isomorphisme

$$\left\{ M \text{ tq } AM = MA \;\middle|\; \varphi^{\leftarrow} \left\{ M \text{ tq } A\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

donc $\{M \text{ tq } AM = MA\}$

de dim 2.

$AI_2 = I_2A$ donc $I_2 \in \{M \text{ tq } AM = MA\}$

$AA = AA$ donc $A \in \{M \text{ tq } AM = MA\}$

donc $\{I_2, A\} \subset \{M \text{ tq } AM = MA\}$

donc $\mathrm{Vect}\{I_2, A\} \subset \{M \text{ tq } AM = MA\}$

or $\dim\{I_2, A\} = 2 = \dim\{M \text{ tq } AM = MA\}$

donc $\mathrm{Vect}\{I_2, A\} = \{M \text{ tq } AM = MA\}$