EXM CCINP

$\boxed{64/1}$

Supposons $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E$

$\boxed{\supset}$ OK par décroissance de $(\mathrm{Im} \circ f^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im} f$ ie il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

Mais $x = \underbrace{x_i}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{x_k}_{\in \mathrm{Ker} f}$

On a donc un $y_i \in E$ tel que $f(y_i) = x_i$

et on a donc $f(x_k) = 0_E$

Donc $y = f(x_i + x_k) = f(x_i) + f(x_k)$ par linéarité

$= f(f(y_i))$

Donc $y \in \mathrm{Im} f^2$

$\boxed{64/2/a}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

Or $\mathrm{Ker} f^n \in \nearrow_c$ donc $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

On a $\begin{cases} n = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f \\ n = \dim \mathrm{Ker} f^2 + \mathrm{rg} f^2 \end{cases}$

Or $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ donc $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2$

On a $\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 \\ \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \end{cases}$

Donc par prop fonda sur les sevs en dim finie,

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par raisonnement analogue $\begin{pmatrix} \operatorname{Im} \rightsquigarrow \operatorname{Ker} \\ \subset \rightsquigarrow \supset \end{pmatrix}$

$\boxed{64/2/b}$ Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

Montrons $\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n & (*) \\ \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} & (**) \end{cases}$

$(*)$ · ok d'ap. le thm. du rang.

$(**)$: Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ ie

$\begin{cases} f(x) = 0_E \\ \overset{\text{def}}{\exists} y \in E, \; x = f(y) \end{cases}$

Donc $f(f(y)) = 0_E$ ie $y \in \operatorname{Ker} f^2$

$= \operatorname{Ker} f$ par hypothèse

donc $f(y) = 0_E = x$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$