$\boxed{\text{CCINP 56}}$

$$H = x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1. Ok!

2. $u = \dfrac{1}{\ln} - \dfrac{1}{\mathrm{id}-1} \xrightarrow[x\to 1]{} ?$

$h := x-1 \iff x = h+1$

$h \to 0 \iff x \longrightarrow 1$

$$u(1+h) = \frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h}$$

$$= \frac{h - \ln(1+h)}{h\ln(1+h)}$$

$$= \frac{h - (h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h))}{h(h + h\hat{\varepsilon}(h))}$$

$$= \frac{\frac{h^2}{2} - h^2\varepsilon(h)}{h^2 + h^2\hat{\varepsilon}(h)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon(h)}{1 + \hat{\varepsilon}(h)}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u \xrightarrow[1]{} \frac{1}{2}$$

3.

$$H = \int_{id}^{id^2} \frac{dt}{\ln t}$$

$$= x \mapsto \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt$$ par linéarité de $\int$...

$$= x \mapsto \int_x^{x^2} u + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt$$

$u \xrightarrow[1]{} \frac{1}{2}$ donc u se prolonge par continuité en 1.

On note u_r le prolongement :

$$u_r = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ u(x) \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Notons U une primitive de u_r

$$\int_x^{x^2} u_r = U(x^2) - U(x) \xrightarrow[x \to 1]{} U(1) - U(1) = 0$$

par continuité de u_r

$$= 0 + \Big[\ln \circ (id - 1)\Big]_x^{x^2}$$

pour $x > 1$ donc $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ donc

$$= \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}\right)$$

$$= \ln(x+1)$$

$$\xrightarrow[x \to 1^+]{} \ln(2)$$ par continuité de ln