EX$^{\text{ice}}$ CCINP

$\boxed{46}$

$$\sum_{n\geqslant 0} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = \sum_{n\geqslant 0} u_n$$

$u \to 0$?

$$\sqrt{n^2+n+1} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= n\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}_{x\to 0}}$$

$(1+X)^\alpha$ où $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ X = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \end{cases}$

$$(1+X)^\alpha = 1+\alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}X^2 + o(X^2)$$

$$= 1+\alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}X^2 + \mathcal{O}(X^3)$$

ici $\sqrt{1+X} = 1+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{8}+\mathcal{O}(X^3)$

donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$= 1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{n\pi}{2n} + \frac{3n\pi}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

rpl
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
- $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$

$$u_n = -\sin\left(n\pi + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \sin\Big(\underbrace{\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 0}\Big)$$

$\longrightarrow 0$

$$|u_n| = \sin\Big(\underbrace{\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{3\pi}{8n} > 0 \Rightarrow > 0}\Big) \sim \frac{3\pi}{8n}$$

$\sum \frac{3\pi}{8n}$ diverge d'après Riemann $\alpha = 1$
et par linéarité.

$\Big\{$

par PdC, ne converge pas !

$$|u_n| = |\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})| \overset{?}{\in} \searrow$$

« Aucun moyen de le savoir !

$$|u_n| = \sin\Big(\underbrace{\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{monotone pas} \\ \text{déterminable après} \\ \text{DA...}}}\Big)$$

$$u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$\sin x = x + O(x^2)$ donc

$$u_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^{n+1}3\pi}{8n}$ converge par TSSA

En effet : $\begin{cases} \left|\frac{(-1)^{n+1}3\pi}{8n}\right| = \frac{3\pi}{8n} \\ \frac{3\pi}{8n} \in \searrow \text{ et } \frac{3\pi}{8n} \to 0 \end{cases}$

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann $\alpha = 2$

donc $\sum_{n \geq 1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge d'après

le corollaire de l'absolue convergence

et du principe de comparaison.

- Et donc $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^{n+1} 3\pi}{8n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

converge par linéarité