CCINP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} u_0 := x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{atan} u_n \end{cases}$

1.a.

1

__1er cas ($u_1 < u_0$) :__

$\boxed{\operatorname{atan} \in \nearrow(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \Rightarrow \boxed{\operatorname{atan} u_1 < \operatorname{atan} u_0}$

ie $u_2 < u_1$

$\vdots$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow \boxed{u \in \searrow(\mathbb{N}, \mathbb{R})}$

__2e cas ($u_1 > u_0$) :__

idem $\Rightarrow u \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

__3e cas ($u_1 = u_0$) :__

u constant $\left(\in {}^c(\nearrow \cup \searrow)\right)$

$\boxed{g := \operatorname{atan} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$

$\begin{cases} g' = \dfrac{-(\mathrm{id})^2}{1+(\mathrm{id})^2} < 0 \Rightarrow g \in \searrow \\ g(0) = 0 \end{cases}$ tab var

	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	$\vdots$	$-$	
g	$\oplus$	$\searrow$	0	$\ominus$ $\searrow$	

1.b.

$$\begin{cases} g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \mathbb{R} \text{ interv fermé} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1er cas ($u_0 > 0$) :

$\underbrace{u \in \searrow \text{ et } u \text{ mino } 0}_{TLM} \Rightarrow u \longrightarrow 0$, seul pt fixe

2e cas ($u_0 = 0$) :

$u = (0)_{n \in \mathbb{N}}$

3e cas ($u_0 < 0$) :

$\underbrace{u \in \nearrow \text{ et } u \text{ majo } 0}_{TLM} \Rightarrow u \longrightarrow 0$, seul pt fixe

2. Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $h = h \circ \operatorname{atan}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\begin{cases} u_0 := x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := \operatorname{atan} \circ u_n \end{cases}$

$$h(x) = h(u_0) = h \circ \operatorname{atan}(u_0)$$
$$= h(u_1)$$
$$= h \circ \operatorname{atan} u_1$$
$$\vdots$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ h(x) = h(u_n)$

De plus, $h \circ u \xrightarrow[\infty]{} h(0)$ car $h \in \mathcal{C}$

donc $h(x) \xrightarrow[\infty]{} h(0)$ par ! de lim

donc $h(x) = h(0)$
donc h constante.

Réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Enfin, seules les fonctions const conviennent.