$\boxed{39/1/a}$

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\geq 0},\ \sum_{n\geq 0} x_n^2 \text{ converge} \right\}$$

ex

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_n \in \ell^2 \quad \text{car} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

$$\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)_n \in \ell^2 \iff \underbrace{\alpha > \frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_n \notin \ell^2$$

$$(0)_n \in \ell^2 \quad \text{car} \quad \sum_{n\geq 0} 0^2 \text{ converge}$$

On suppose

$$(x_n)_n \in \ell^2 \quad \text{ie} \quad \sum_{n\geq 0} x_n^2 \text{ converge}$$

$$(y_n)_n \in \ell^2 \quad \text{ie} \quad \sum_{n\geq 0} y_n^2 \text{ converge}$$

Montrons que $\sum_{n\geq 0} x_n y_n$ converge.

Montrons la CVA ie que $\sum_{n \geq 0} |x_n y_n|$ converge

à l'aide du PdC.

On cherche donc à majorer $|x y|$

Avec le max ?

$$|x_n| \leq \max\{|x_n|, |y_n|\}$$
$$|y_n| \leq \max\{|x_n|, |y_n|\}$$

$$|x_n y_n| \leq \max\{|x_n|, |y_n|\}^2$$

$$\sum \max\{|x_n|, |y_n|\}^2 = \sum \max\{x_n^2, y_n^2\} \quad \text{cv?}$$

$$\max\{x_n^2, y_n^2\} \leq x_n^2 + y_n^2$$

<u>Bilan</u> $|x_n y_n| \leq x_n^2 + y_n^2$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1 x_n^2 \\ \sum_1 y_n^2 \end{array}\right. \quad \text{convergent}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum x_n^2 + y_n^2 \ \text{conv. par linéarité} \\ \sum |x_n y_n|, \sum_1 x_n^2 + y_n^2 \ \text{STP} \\ \\ \forall n \ |x_n y_n| \leq x_n^2 + y_n^2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sum_1 |x_n y_n|$ converge par PdC

$\Leftrightarrow \sum_1 x_n y_n$ CVA

$\Rightarrow \sum_1 x_n y_n$ converge.

$\boxed{39/1/b}$ Montrons ℓ^2 sev

- $(0)_n \in \ell^2$: ok !
- Mq ℓ^2 stable CL.

Soient $\begin{cases} (x_n)_n \in \ell^2 \\ (y_n)_n \in \ell^2 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

Montrons que $\lambda (x_n)_n + \mu (y_n)_n \in \ell^2$

ie $\sum (\lambda (x_n)_n + \mu (y_n)_n)^2$ converge

par linéarité