$\boxed{38/1}$

On suppose que $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{K} \\ x \in E \setminus \{0_E\} \end{cases}$

sont tels que $f(x) = \lambda x$

P annule $f \Rightarrow P$ annule λ

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$P(f) = a_0 \, id_E + a_1 f + \dots + a_n \underbrace{f^n}_{f \circ f \circ \dots \circ f} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$P(f)(x) = a_0 x + a_1 \underbrace{\lambda x}_{f(x)} + a_2 \underbrace{\lambda^2 x}_{f^2(x)} + \dots + a_n \lambda^n x = 0_E$$

$$= (a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n) \underbrace{x}_{\neq 0_E} = 0_E$$

d'où $P(\lambda) = 0_E$ car $x \neq 0_E$

$\boxed{38/2/a}$ On veut montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$u^2(M) - 2u(M) + M = (0)$$

ie $u(M + Tr(M)A) - 2(M + Tr(M)A) + M = (0)$

ie $u(M) + TrM \, u(A) - 2M - 2TrM A + M = (0)$

ie $M + Tr(M)A + Tr(M)(A + Tr(A)A) - 2M - 2Tr(M)A + M = (0)$

Autrement dit, $(X-1)^2$ annule u ie $(u - id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

38/2/b

Non :

s'il existe une alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ serait de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{n^2} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{(u-id_E)^2}_{0_{\mathcal{L}(E)}}) = \begin{pmatrix} (\lambda_1-1)^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & (\lambda_{n^2}-1)^2 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \vdots \\ \lambda_{n^2} = n^2 \end{cases}$

et $u = id_E$ $\boxed{\lightning}$