CCINP 35 ($E = \mathbb{R}$)

1. Mq $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x \xrightarrow[\infty]{} a \Rightarrow f\circ x \xrightarrow[\infty]{} f(a)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supp $x \xrightarrow[\infty]{} a$.] algo
Mq $f \circ x \xrightarrow[\infty]{} f(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x-a| < \eta} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$] $\vdash$ def $\mathcal{C}$ pour f

et

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$. Soit $n \geq n_0$] $\vdash$ def lim pour x

On a $x_n \in \mathbb{R}$, donc $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ donne]

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposition. Supp $f \notin \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. Mq $\exists x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \xrightarrow[\infty]{} a$ et $f \circ x \not\xrightarrow[\infty]{} f(a)$] algo [contrapos.]

Il existe $\varepsilon > 0$ tq. $\forall \eta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \eta$ et $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.] $\vdash \neg$(def $\mathcal{C}$ pour f)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_n \in \mathbb{R}$ tq. $|x - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ car $\frac{1}{n} > 0$] $\vdash$ au-dessus, avec $\begin{cases} x \text{ exploded into } x_n,\ n \in \mathbb{N}. \\ \eta = \frac{1}{n} > 0. \end{cases}$

En particulier, $x \xrightarrow[\infty]{} a$.] $\vdash$ def lim pour x

Supp $f \circ x \xrightarrow[\infty]{} f(a)$. On a $0 \geq \varepsilon$ imp donc on a $f \circ x \not\xrightarrow[\infty]{} f(a)$] algo [absurde] sur $f \circ x \not\xrightarrow[\infty]{} f(a)$ avec contrad: $0 \geq \varepsilon$

2. Mq $\left(\forall x \in A,\ f(x) = g(x)\right) \Rightarrow f = g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

A dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u \xrightarrow[\infty]{} x$.] $\vdash$ CSD sur A

D'après 1 $\begin{cases} f \circ u \xrightarrow[\infty]{} f(x) \\ g \circ u \xrightarrow[\infty]{} g(x) \end{cases}$ car $f, g \in \mathcal{C}$] $\downarrow$ 1

Par unicité de lim, $f(x) = g(x)$. On a $x \in \mathbb{R} = D_f = D_g$ donc $f = g$] $\vdash$ unicité de lim