

CCINP 35 (E=R)

1. $M_q f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^N, x \xrightarrow{\infty} a \Rightarrow f \circ x \xrightarrow{\infty} f(a)$

\Rightarrow | Supp $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Supp $x \xrightarrow{\infty} a$.] algo
 $M_q f \circ x \xrightarrow{\infty} f(a)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$] t def \mathcal{C} pour f

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |x_n - a| < \epsilon$. Soit $n \geq n_0$] t def lim pour x

On a $x_n \in \mathbb{R}$, donc $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ donne]

\Leftarrow | Par contraposition. Supp $f \notin \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. $M_q \exists x \in \mathbb{R}^N, x \xrightarrow{\infty} a$ et $f \circ x \not\xrightarrow{\infty} f(a)$] algo [contrapos.]

Il existe $\epsilon > 0$ tq. $\forall \eta > 0 \exists x \in \mathbb{R}, |x-a| < \eta$ et $|f(x)-f(a)| \geq \epsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_n \in \mathbb{R}$ tq. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ car $\frac{1}{n} > 0$

En particulier, $x \xrightarrow{\infty} a$.
 Supp $f \circ x \not\xrightarrow{\infty} f(a)$. On a $0 \geq \epsilon$ donc on a $f \circ x \not\xrightarrow{\infty} f(a)$

2. $M_q (\forall x \in A, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
 A dense dans \mathbb{R} donc il existe $u \in A^N$ tq $u \xrightarrow{\infty} x$.

D'après 1. $\begin{cases} f \circ u \xrightarrow{\infty} f(x) \\ g \circ u \xrightarrow{\infty} g(x) \end{cases}$ car $f, g \in \mathcal{C}$

Par unicité de lim, $f(x) = g(x)$. On a $x \in \mathbb{R} = D_f = D_g$ donc $f = g$

] t \neg (def \mathcal{C} pour f)
] t au-dessus, avec $\begin{cases} x \text{ exploded into } x_n, n \in \mathbb{N}. \\ \eta = \frac{1}{n} > 0. \end{cases}$
] t def lim pour x
] algo [absurde] sur $f \circ x \not\xrightarrow{\infty} f(a)$ avec contrad: $0 \geq \epsilon$
] t CSD sur A
] \downarrow 1
] t unicité de lim

[Handwritten notes on a separate sheet, partially visible on the right edge of the page. The text is mostly illegible but appears to contain mathematical derivations and definitions.]