CCINP 35

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Mq $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R}) \iff \forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to f(a)$

$f \xrightarrow[a]{} f(a)$ signifie $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta$
$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp $f \in \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. Mq $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to f(a)$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supp $u \to a$.) algo

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| < \varepsilon$) def lim

Mq $f(u_n) \to f(a)$

Soit $\varepsilon > 0$. $f \xrightarrow[a]{} f(a)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que) def lim pour f (car $\mathcal{C}$)

$\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

On a $u \to a$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que) + def lim pour u

$\forall n \geq n_0, |u_n - a| < \eta$.

Or $u_n \in \mathbb{R}$ donc $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$.) $u_n \in \mathbb{R}$ donc OK

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons-le par $\boxed{\text{contraposition}}$. Supposons $f \notin \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$. algo

Mq $\exists u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \to a \not\Rightarrow f(u_n) \to f(a)$

ie $\exists u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \to a$ et $f(u_n) \not\to f(a)$. | Morgan

+ Morgan sur def lim f car $\mathcal{C}$

Il existe $\varepsilon > 0$ tq $\forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $x_n \in \mathbb{R}$ tq $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$

On a construit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $|x_n - a| < \frac{1}{n}$

x est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon$

En particulier $x_n \longrightarrow a$

mais $f(x_n) \not\longrightarrow f(x)$ car les inégalités larges passant à la limite, on aurait $0 \geqslant \varepsilon$.

2. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Mq $(\forall x \in A, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. CSD

A dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u \longrightarrow x$

D'après $\boxed{P_2}$ on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$

de même pour g $g(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(x)$

Par unicité de lim $f(x) = g(x)$