1. On a $u \sim v$ ie $\frac{v}{u} \to 1$ car $v \neq 0$ ÀPCR.
   Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| &< 1 \\ \text{ie } \forall n \geq n_0,\ -1 < \frac{u_n}{v_n} &< 1 \\ \text{donc } \forall n \geq n_0,\ 0 < \frac{u_n}{v_n}& \\ \text{donc } \forall n \geq n_0,\ \operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(v_n)&\end{aligned}$$

2. Posons $x := \frac{1}{n}$. On a ainsi $x \to 0$. Faisons le DL de tan :

$$\begin{gathered}\tan x = x + o(x) \\ \iff 1 + \tan(x)^2 = 1 + x^2 + o(x^2) = \tan'(x) \\ \implies \tan x = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{gathered}$$

   D'autre part, le DL de sh :

$$\operatorname{sh} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   Ainsi:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x - \tan x &= \cancel{x} - \frac{x^3}{3} \cancel{-x} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= -\frac{5x^3}{6} \\ &= -\frac{5}{6n^3} \\ &< 0\end{aligned}$$

   D'où $\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$ négatif au voisinage de ∞.