# Applications

Rappel : $B^A$ et $\mathcal{F}(A,B)$ désignent l'ensemble des applications de $A$ dans $B$.
On note indifféremment $f \in B^A$, ou $f \in \mathcal{F}(A,B)$, ou $f : A \to B$.

## Injectivité, surjectivité, bijectivité

**Exercice 1.** *Exemples.*

1. Donner un exemple d'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ non injective. Est-elle surjective ?
2. Donner un exemple d'application de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ surjective. Est-elle injective ?
3. Donner un exemple d'application de $\mathbb{Q}_+$ dans $\mathbb{N}$ injective. Est-elle surjective ?
4. Donner un exemple d'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ bijective.

**Exercice 2.** *Compositions.*
*Où l'on démontre deux théorèmes du cours et on en retrouve un troisième.*

1. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
2. Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.
3. Retrouver plus simplement le résultat du cours : la composée de deux applications bijectives est bijective.

**Exercice 3.** *Décompositions.*

On se donne trois ensembles $A$, $B$, $C$ et deux applications $f \in B^A$, $g \in C^B$.

1. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective. Donner un exemple où $g$ n'est pas injective.
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective. Donner un exemple où $f$ n'est pas surjective.
3. Montrer que, si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ est injective.
4. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.
5. Dans cette question on suppose $A = B$ et $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer les équivalences : $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $f$ bijective.

## Vous reprendrez bien un peu d'entiers naturels ?

**Exercice 4.**

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Montrer que les applications $u = f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $v = f \times g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ne sont pas des bijections.

**Exercice 5.**

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On rappelle qu'on note $f \leqslant g$ pour $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant g(n)$.

1. On suppose $f$ injective et $f \leqslant \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Montrer qu'on a $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose $g$ surjective et $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \leqslant g$. Montrer qu'on a $g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
3. On suppose $f$ injective, $g$ surjective et $f \leqslant g$. Montrer qu'on a $f = g$.

**Exercice 6.** *Où l'injectivité aide à résoudre une équation fonctionnelle.*

On cherche à déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f(f(n)) = 2n \quad (\star)$.

1. Montrer que si $f$ respecte $(\star)$, alors $f$ est injective.
2. En déduire que, si $f$ respecte $(\star)$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
3. Conclure.

EX$^{\underline{M}}$APP

$\boxed{1/1}$ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} = \lfloor \mathrm{id} \rfloor$ est non-injective:

$\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont deux antécédents de $0$.

$\frac{1}{2}$ n'a pas d'antécédants donc $f$ non surjective

$\boxed{1/2}$ $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} = f \mapsto f(1)^3$ est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $g = x \mapsto \sqrt[3]{y}$. On a bien $f(g) = y$

pas-injective: $0$ a au moins deux antécédants:

$$\begin{cases} x \mapsto \sqrt[3]{0} = x \mapsto 0 \\ x \mapsto x - 1 \end{cases}$$

## 12-17 -- Applications, exos ##

1/3

$$\begin{cases} \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{N} \\ \frac{p}{q} \text{ irréd.} \longmapsto 2^p(2q+1) \end{cases}$$ injective.

Soient $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}_+$ (écriture irréductible)

Supp $f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = f\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$

Alors $2^{p_1}(2q_1+1) = 2^{p_2}(2q_2+1)$

ie $2q_1+1 = 2^{p_2-p_1}(2q_2+1)$

donc $2q_1+1 \in 2\mathbb{N}+1$

donc $2^{p_2-p_1}(2q_2+1) \in 2\mathbb{N}+1$

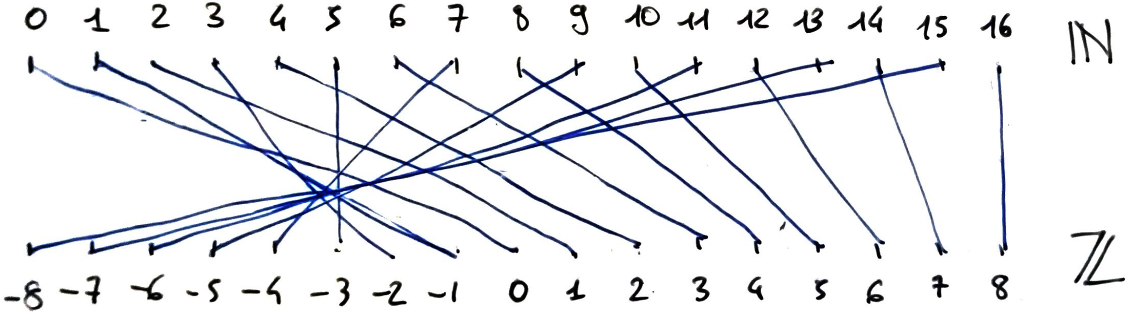
pour que $2^{p_2-p_1}(2q_2+1) \in 2\mathbb{N}+1$,

On a nécessairement $\boxed{p_2-p_1=0}$

En réinjectant, $2q_1+1 = 2q_2+1$ ie $\boxed{q_1=q_2}$

0 n'a pas d'antécédent donc l'application n'a pas d'antécédent

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$ est bijective.



Montrons-le

<u>Injectivité</u> (Mq $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$)

Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tq $f(n_1) = f(n_2)$.

<u>Traitons deux cas</u>

<u>1er cas</u> ($f(n_1) = f(n_2) \geqslant 0$):

Alors $f(n_1)$ ne peut pas être égal à $-\frac{n+1}{2} < 0$

donc $f(n_1) = \frac{n_1}{2}$

De même, $f(n_2) = \frac{n_2}{2}$. D'où $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Leftrightarrow n_1 = n_2$

<u>2e cas</u> ($f(n_1) = f(n_2) \leqslant 0$):

Alors $f(n_1)$ ne peut pas être égal à $\frac{n}{2} > 0$

donc $f(n_1) = -\frac{n_1+1}{2}$

de même, $f(n_2) = -\frac{n_2+1}{2}$

d'où $-\frac{n_1+1}{2} = -\frac{n_2+1}{2} \Leftrightarrow n_1 = n_2$

<u>Surjectivité</u> ($\forall k \in \mathbb{Z},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f(n) = k$)

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Traitons deux cas.

<u>1er cas</u> ($k > 0$): Posons $n = 2k$. On a bien $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k \end{cases}$

<u>2e cas</u> ($k \leq 0$): Posons $n = \underbrace{-2k}_{<0} - 1$.

On a bien $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \Rightarrow f(n) = -\frac{(-2k-1)+1}{2} = k$

d'où la surj, d'où la bij.

$\boxed{2/1}$ Soient $A, B, C$ des ensembles.

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ injectives.

Mq $g \circ f$ injective.

Soient $a_1, a_2 \in A$. Supp $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

$\Leftrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ par inj. de $g$

$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$ par inj. de $f$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2$

$\boxed{2/2}$ Soient $A, B, C$ des ensembles.

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ surjectives.

Mq $g \circ f$ surjective.

Onsq $\begin{cases} \forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b & (f) \\ \forall c \in C, \exists b \in B, g(b) = c & (g) \end{cases}$

Soit $c \in C$, Par $(g)$, il existe $b \in B$ tq $g(b) = c$.

D'après $(f)$, il existe $a \in A$ tq $f(a) = b$.

Ainsi $c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$.

On a a un antécédent de $c$ par $g \circ f$ d'où $g \circ f$ surjecti

EX M APP

$\boxed{2/3}$

Soient $A, B, C$ des ensembles.

Soient $\begin{cases} f : A \to B \\ g : B \to C \end{cases}$ bijectives

$\begin{cases} \text{En particulier } f \text{ et } g \text{ injectives. D'après } 2/1,\ g \circ f \text{ est inj} \\ \text{En particulier } f \text{ et } g \text{ surjectives. D'après } 2/2,\ g \circ f \text{ est surj} \end{cases}$

$g \circ f$ est bij

$\boxed{3/1}$ On suppose $g \circ f$ injective.

Soient $(a_1, a_2) \in A^2$ tq $f(a_1) = f(a_2)$

En composant par $g$, on a $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

ie $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

Or si $g \circ f$ est injective, donc $a_1 = a_2$

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ donc $f$ est injective.

Notons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$.

$g \circ f = (\exp)^2 = \exp \circ (2id)$ $g$ n'est pas injective

$\boxed{3/2}$ On suppose $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $g \circ f$ surjective donc il existe $x \in A$

tel que $z = g \circ f(x)$ ie $z = g(f(x))$. Posons $y := f(x)$.

on a $z = g(y)$ donc $g$ est surjective

Notons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ donc $g \circ f$ surjective

$f$ n'est pas surjective d'après le cours.

$\boxed{3/3}$ Supp $\begin{cases} g \circ f & \text{injective} \\ f & \text{surjective} \end{cases}$

ie $\begin{cases} \forall (a_1, a_2) \in A^2, \ g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2 \\ \forall b \in B, \ \exists a \in A, \ f(a) = b \end{cases}$

Mq $g$ injective. ie $\forall (b_1, b_2) \in B^2, \ g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

Soit $(b_1, b_2) \in B^2$. Il existe $a_1, a_2 \in A^2$, $\begin{cases} f(a_1) = b_1 \\ f(a_2) = b_2 \end{cases}$

$g(b_1) = g(f(a_1))$ et $g(b_2) = g(f(b_2))$

Supp $g(b_1) = g(b_2)$ ie $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

donc $a_1 = a_2$

donc $f(a_1) = f(a_2)$

donc $b_1 = b_2$

$\boxed{\text{Meth 2}}$ D'après 3/1, $f$ est surjective donc come $f$ est surj, $f$ bijective

donc d'après le cours $f$ a une fonction réciproque $f^{-1}$ puis elle est

m̂ bij donc en particulier injective

$g = \underbrace{(g \circ f)}_{inj} \circ \underbrace{f^{-1}}_{inj}$ est inj d'après 2

$\boxed{3/4}$ D'après 3/2 $g$ est injective

Donc comme $g$ est injective on a $g$ bijective donc $g$ a une fonction réciproque $g^{-1}$ elle est surjective

$f = \underbrace{g^{-1}}_{surj} \circ \underbrace{(g \circ f)}_{surj}$ est surj

Notons $H = \{u(x), x \in \mathbb{N}\}$.

<u>1<sup></sup>er cas</u>

Pour que $u$ soit une surjection et donc une bijection. On doit avoir $1 \in H$.

Or le seul moyen d'avoir $u(a) = 1$ est

(1) Soit $f(a) = 1$ et $g(a) = 0$
(2) Soit $f(a) = 0$ et $g(a) = 1$ pour un certain $a \in \mathbb{N}$

De même on doit avoir $0 \in H$. Le seul moyen d'avoir $u(b) = 0$ est $f(b) = 0$ et $g(b) = 0$

Donc il est impossible d'avoir $1 \in H$ et $0 \in H$

Notons $H = \{v(x), x \in \mathbb{N}\}$ Pour que $v$ soit une surjection et donc une bijection, on doit avoir $1 \in H$ or le seul moyen d'avoir $v(a) = 1$. $f(a) \times g(a) = 1$

De même $2 \in H$ donc il existe $b$ tq

$\overset{v}{u} = \overset{f \times g}{f + g}$ bij ?

$\overset{1}{0}$ a un antécédent $\underline{\alpha}$

$\underbrace{f(\alpha)}_{\in \mathbb{N}} \overset{\times}{+} \underbrace{g(\alpha)}_{\in \mathbb{N}} = \overset{v}{u}(\alpha) = 0$

$f(\alpha) = 0 \; 1$
$g(\alpha) = 0 \; 1$

$\overset{2}{1}$ a un antécédent $\underline{\beta}$

$\underbrace{f(\beta)}_{\in \mathbb{N}} \overset{\times}{+} \underbrace{g(\beta)}_{\in \mathbb{N}} = u(\beta) = 1^{2}$

donc $\{f(\beta), g(\beta)\} = \{\overset{1}{1}, \overset{2}{0}\}$

$\underline{\text{À R.P.}}$, $f(\beta) = 0 \; 1$ (et $g(\beta) = \overset{2}{1}$)

or $f(\alpha) = 0 \; 1$

par injectivité, $\alpha = \beta$ donc $\underbrace{\overset{v}{u}(\alpha)}_{1 \; 0} = \underbrace{\overset{v}{u}(\beta)}_{2 \; 1}$ IMP

# Applications

## Correction des derniers exercices.

**Exercice 3.** *Décompositions.*

On se donne trois ensembles $A$, $B$, $C$ et deux applications $f \in B^A$, $g \in C^B$.

5. Dans cette question on suppose $A = B$ et $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer les équivalences : $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $f$ bijective.

- Par définition, on a $f$ bijective $\Rightarrow$ $f$ injective et $f$ bijective $\Rightarrow$ $f$ surjective.
- Supposons maintenant $f$ injective et soit $a \in A$.
  On a $f((f \circ f)(a)) = (f \circ f \circ f)(a) = f(a)$, donc par injectivité de $f$ on a $(f \circ f)(a) = a = id_A(a)$.
  Ceci étant vrai pour tout élément $a \in A$, on a donc $f \circ f = id_A$.
  En particulier, $f$ est bijective de bijection réciproque $f \circ f$.
  On a donc montré l'implication : $f$ injective $\Rightarrow$ $f$ bijective.
- Supposons maintenant $f$ surjective et soient $a$ et $a'$ deux éléments de $A$ tels que $f(a) = f(a')$.
  Puisque $f$ est surjective, $f \circ f$ l'est aussi et donc il existe un élément $x \in A$ tel que $(f \circ f)(x) = a$ et il existe un élément $x' \in A$ tel que $(f \circ f)(x') = a'$.
  L'égalité $f(a) = f(a')$ se réécrit alors $(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x')$, qui se réécrit elle-même, par hypothèse, sous la forme $f(x) = f(x')$, ce qui implique finalement $a = f(f(x)) = f(f(x')) = a'$.
  Et en résumé $f$ est bien injective.
  On a donc montré l'implication : $f$ surjective $\Rightarrow$ $f$ injective.

Par composition des implications, on a donc bien monté toutes les implications intervenant dans l'énoncé.

**Exercice 5.**

$\boxed{5/1}$

- $f$ injective
- $f \leqslant id_{\mathbb{N}}$ ie $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$

On veut mq $f = id_{\mathbb{N}}$ ie $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$

Procédons par récurrence forte.

<u>Hérédité forte</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp $\forall k \in [\![0, n[\![, f(k) = k$

$0 \leq f(n) \leq n$

$f(n) = n$ ou $f(n) \geq n$.

Mq $f(n) = n$ par l'absurde. Supp $f(n) < n$.

Notons $k = f(n)$. $\quad f(k) = k$

$\Leftrightarrow f^2(k) = f(k)$

Or $f$ injective.

$f(k) = f(n)$

$\Rightarrow k = n$

Or $k \in [\![0, n[\![$ donc $k \neq n$

2. On suppose $g$ surjective et $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \leqslant g$. Montrer qu'on a $g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

   On pourrait bâtir une preuve sur le modèle de la réponse précédente. Essayez de le faire. Sérieusement, essayez, sinon la lecture de ce corrigé ne sert essentiellement à rien.

   Une autre solution est de procéder comme dans la question suivante, dans le cas particulier $f = \mathrm{id}_N$. Si vous comprenez le corrigé de la question suivante, vous devriez pouvoir le faire, même mentalement.

3. On suppose $f$ injective, $g$ surjective et $f \leqslant g$. Montrer qu'on a $f = g$.

   La méthode la plus simple (pas la seule !)

   • On commence par une remarque : si $A$ est un ensemble quelconque et $h : A \to \mathbb{N}$, alors $f \leqslant g$ implique $f \circ h \leqslant g \circ h$. Montrons cette remarque en détails bien que ce soit assez évident. Supposons $f \leqslant g$. Soit $a \in A$. Posons $n = h(a)$. On a $f(n) \leqslant g(n)$ car $f \leqslant g$. C'est-à-dire $f(h(a)) \leqslant g(h(a))$ ou encore $(f \circ h)(a) \leqslant (g \circ h)(a)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a bien $f \circ h \leqslant g \circ h$.

• La remarque permet de se ramener à la question 1. En effet, $g$ est surjective donc d'après le cours elle a un inverse à droite $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). On a $f \leqslant g$ donc d'après la remarque $f \circ h \leqslant g \circ h = \mathrm{id}_N$. Par ailleurs, $h$ a un inverse à gauche (qui est $g$) donc d'après le cours elle est injective. Enfin, d'après le cours encore (ou l'exercice 2.), $f \circ h$ est injective comme composée de fonctions injectives. On a donc $f \circ h$ injective et $f \circ h \leqslant \mathrm{id}_N$. Et donc, d'après la question 1., on a $f \circ h = \mathrm{id}_N$.

• Mais comme $f$ est injective, elle admet un inverse à gauche $u$ d'après le cours ($u \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). En composant l'égalité précédente par $u$ à gauche on obtient $u \circ f \circ h = u \circ \mathrm{id}_N$, c'est-à-dire $h = u$ et donc [1] $h \circ f = \mathrm{id}_N$.

• La bête est à terre et ne demande qu'à être achevée. On a $h \circ f = \mathrm{id}_N$. On compose à gauche par $g$ ce qui donne $g \circ h \circ f = g$. Mais comme, par définition de $h$, on a $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, cela se réécrit $f = g$. Et voilou.

**Exercice 6.** *Où l'injectivité aide à résoudre une équation fonctionnelle.*

On cherche à déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f(f(n)) = 2n \quad (\star)$.

1. Montrer que si $f$ respecte $(\star)$, alors $f$ est injective.

   Soit $f$ une application qui respecte $(\star)$. Soient $a$, $b$ dans $\mathbb{N}$ et supposons $f(a) = f(b)$. Alors en appliquant $f$ on obtient $f(f(a)) = f(f(b))$ puis par somme on obtient $f(a) + f(f(a)) = f(b) + f(f(b))$ donc $2a = 2b$ et donc $a = b$.

   D'où l'injectivité.

2. En déduire que, si $f$ respecte $(\star)$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

   Soit $f$ une application qui respecte $(\star)$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$ par récurrence forte.

   **Hérédité forte :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall k < n,\ f(k) = k$. D'après la question précédente, $f$ est injective donc $f(n) \geqslant n$ (si on avait $f(n) < n$ alors par hdrf on aurait $f(f(n)) = f(n)$ et f(n) aurait au moins deux antécédents $n$ et $f(n)$). Par stabilité des inégalités par somme on a donc $f(n) + n \geqslant 2n$ *i. e.* $f(n) + n \geqslant f(n) + f(f(n))$ et donc $n \geqslant f(f(n))$. Si on avait $f(f(n)) < n$, par transitivité on aurait $f(f(n)) < f(n)$ et donc en particulier $f(f(n)) \neq f(n)$, mais par ailleurs, par hdrf, on obtiendrait $f(f(f(n))) = f(f(n))$ et donc $f(f(n))$ aurait deux antécédents $f(n)$ et $f(f(n))$. Ce n'est pas possible, donc $f(f(n)) \geqslant n$ et donc par antisymétrie $f(f(n)) = n$. En réinjectant dans $(\star)$, on obtient bien $f(n) = n$.

   La propriété est fortement héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

3. Conclure.

   Comme $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ respecte de façon évidente $(\star)$, l'ensemble des solutions est $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

## Vous reprendrez bien un peu d'ensembles ?

**Exercice 7.** *Intersection/Union/Traces.*

On se donne un ensemble $E$, deux parties $A$ et $B$ de $E$ et on s'intéresse à l'application $\phi \ : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $A$ et $B$ pour que $\phi$ soit injective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $A$ et $B$ pour que $\phi$ soit surjective.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $A$ et $B$ pour que $\phi$ soit bijective.

**Exercice 8.** *Des isomorphismes ensemblistes.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles $A_1$ et $A_2$ qui sont en bijection (cela signifie qu'il existe deux applications $\varphi_A : A_1 \to A_2$ et $\psi_A : A_2 \to A_1$ telles que $\psi_A \circ \varphi_A = id_{A_1}$ et $\varphi_A \circ \psi_A = id_{A_2}$).

On se donne également deux autres ensembles $B_1$ et $B_2$ qui sont également en bijection.

1. Montrer que les ensembles $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont en bijection.
2. Montrer que les ensembles $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(A_2)$ sont en bijection.
3. Montrer que les ensembles ${B_1}^{A_1}$ et ${B_2}^{A_2}$ sont en bijection.

N.B. : *Tout est trivial (euh... en convient-on ?) si les ensembles sont finis, mais on ne le suppose pas ici.*

**Exercice 9.** *Théorème de Cantor.*

Soit $E$ un ensemble et $f : E \to \mathcal{P}(E)$. On note alors $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

1. Justifier que $A$ n'a pas d'antécédent par $f$.

   *Indication : par l'absurde, en notant $a$ un tel antécédent, montrer qu'on aurait $a \in A \Leftrightarrow a \notin A$.*
2. En déduire en particulier qu'il n'existe jamais de surjection d'un ensemble $E$ dans l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.
3. En déduire en particulier qu'il n'existe pas d'"ensemble de tous les ensembles".

*Remarque : on peut facilement montrer qu'il y a une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (cela résulte très immédiatement de la décomposition en base 10 des réels). La question 2 implique donc que l'infinité des réels est "plus grande" que l'infinité des entiers.*

## Spoil du chapitre "dénombrements"

**Exercice 10.** On organise un tournoi de tennis de la façon suivante : on procède par tours et par élimination directe. À chaque tour, s'il y a un nombre pair de joueurs, chaque joueur affronte un autre joueur : les perdants sont définitivement éliminés, tandis que les gagnants sont sélectionnés pour le tour suivant. Si au contraire il y a un nombre impair de joueurs, un joueur est tiré au hasard et automatiquement qualifié pour le tour suivant ; les autres s'affrontent normalement.

Le tournoi dure assez longtemps, car au départ on ne compte ni plus ni moins que 1 234 joueurs. C'est beaucoup.

**À la fin du tournoi, combien de matches ont été disputés ?**

**Exercice 8.** *Des isomorphismes ensemblistes.*

Dans cet exercice, on se donne deux ensembles $A_1$ et $A_2$ qui sont en bijection (cela signifie qu'il existe deux applications $\varphi_A : A_1 \to A_2$ et $\psi_A : A_2 \to A_1$ telles que $\psi_A \circ \varphi_A = id_{A_1}$ et $\varphi_A \circ \psi_A = id_{A_2}$).

On se donne également deux autres ensembles $B_1$ et $B_2$ qui sont également en bijection.

1. Montrer que les ensembles $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont en bijection.
2. Montrer que les ensembles $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(A_2)$ sont en bijection.
3. Montrer que les ensembles ${B_1}^{A_1}$ et ${B_2}^{A_2}$ sont en bijection.

N.B. : *Tout est trivial (euh... en convient-on ?) si les ensembles sont finis, mais on ne le suppose pas ici.*

Je conviens que tout est trivial lorsque les ensembles sont finis car deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont le même cardinal, il suffit ensuite de connaître les formules donnant le cardinal d'un ensemble de la forme $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$ ou $B^A$. Sinon :

1. Notons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A_1 \times B_1 & \to & A_2 \times B_2 \\ (a_1, b_1) & \mapsto & \big(\varphi_A(a_1), \varphi_B(b_1)\big) \end{array} \right.$ et de façon totalement symétrique $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} A_2 \times B_2 & \to & A_1 \times B_1 \\ (a_2, b_2) & \mapsto & \big(\psi_A(a_2), \psi_B(b_2)\big). \end{array} \right.$

   Montrons qu'on a $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{A_1 \times B_1}$. Soit $(x_1, y_1) \in A_1 \times B_1$.
   On a $(\Psi \circ \Phi)(x_1, y_1) = \Psi\big(\Phi(x_1, y_1)\big) = \Psi\big(\varphi_A(x_1), \varphi_B(y_1)\big)$,
   donc $(\Psi \circ \Phi)(x_1, y_1) = \Big(\psi_A\big(\varphi_A(x_1)\big), \psi_B\big(\varphi_B(y_1)\big)\Big) = (x_1, y_1)$.
   Ceci étant vrai pour tout couple $(x_1, y_1) \in A \times B$, on a $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{A_1 \times B_1}$.

   On montre de façon identique qu'on a $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{A_2 \times B_2}$ (il s'agit juste de permuter les 1 et les 2 et les $\varphi$ et les $\psi$).

   Par suite, $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont en bijection.

2. Notons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A_1) & \to & \mathcal{P}(A_2) \\ P & \mapsto & \varphi_A(P) = \{\varphi_A(x),\ x \in P\}. \end{array} \right.$

   Et, de façon totalement symétrique : $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A_2) & \to & \mathcal{P}(A_1) \\ Q & \mapsto & \psi_A(Q) = \{\psi_A(y),\ y \in Q\}. \end{array} \right.$

   Montrons qu'on a $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A_1)}$. Soit $X \subset A_1$.
   On a $(\Psi \circ \Phi)(X) = \Psi\big(\{\varphi_A(x),\ x \in X\}\big) = \{\psi(\varphi_A(x)),\ x \in X\} = \{x,\ x \in X\} = X$.
   Ceci étant vrai pour toute partie $X$ de $A_1$, on a bien $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A_1)}$.

   On montre de façon identique qu'on a $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A_2)}$.

   Par suite, $\mathcal{P}(A_1)$ et $\mathcal{P}(A_2)$ sont en bijection.

3. Notons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} {B_1}^{A_1} & \to & {B_2}^{A_2} \\ u & \mapsto & \varphi_B \circ u \circ \psi_A \end{array} \right.$ et $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} {B_2}^{A_2} & \to & {B_1}^{A_1} \\ v & \mapsto & \psi_B \circ v \circ \varphi_A. \end{array} \right.$

   Montrons qu'on a $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{{B_1}^{A_1}}$. Soit $f \in {B_1}^{A_1}$.
   On a $(\Psi \circ \Phi)(f) = \Psi\big(\Phi(f)\big) = \Psi(\varphi_B \circ f \circ \psi_A) = \psi_B \circ \varphi_B \circ f \circ \psi_A \circ \varphi_A = f$ par associativité de la composition.
   Ceci étant vrai pour toute application $f$ de ${B_1}^{A_1}$, on a bien $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{{B_1}^{A_1}}$.

   Montrons qu'on a $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{{B_2}^{A_2}}$. Soit $g \in {B_2}^{A_2}$.
   On a $(\Phi \circ \Psi)(g) = \Phi\big(\Psi(g)\big) = \Phi(\psi_B \circ g \circ \varphi_A) = \varphi_B \circ \psi_B \circ g \circ \varphi_A \circ \psi_A = g$ par associativité de la composition.

Ceci étant vrai pour toute application $g$ de ${B_2}^{A_2}$, on a bien $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{{B_2}^{A_2}}$.

Par suite, ${B_1}^{A_1}$ et ${B_2}^{A_2}$ sont en bijection.

**Exercice 9.** *Théorème de Cantor.*

Soit $E$ un ensemble et $f : E \to \mathcal{P}(E)$. On note alors $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

1. Justifier que $A$ n'a pas d'antécédent par $f$.

   *Indication : par l'absurde, en notant a un tel antécédent, montrer qu'on aurait $a \in A \Leftrightarrow a \notin A$.*

   Par l'absurde : supposons qu'un tel antécédent $a$ existe.
   On a alors $a \in A \Leftrightarrow a \in \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \Leftrightarrow a \notin f(a) \Leftrightarrow a \notin A$.
   Il existe donc un énoncé équivalent à sa négation, ce qui constitue une contradiction.

2. En déduire en particulier qu'il n'existe jamais de surjection d'un ensemble $E$ dans l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.

   Par l'absurde : si une telle application $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective existe la partie $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent ce qui contredit la surjectivité.

3. En déduire en particulier qu'il n'existe pas d'"ensemble de tous les ensembles".

   Supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont tous les ensembles (en particulier, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ appartiennent à $\mathcal{E}$, ça sent quand même l'arnaque cette histoire). Toutes les parties de $E$ sont des ensembles donc appartiennent à $E$ par hypothèse. Considérons l'application $\varphi$ définie de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$ comme suit : si $A$ est une partie de $E$, alors $\varphi(A) = A$, sinon $\varphi(A) = \emptyset$. Comme toutes les parties de $E$ appartiennent à $E$, $\varphi$ est bien surjective. On a donc exhibé une surjection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$, ce qui entre en contradiction avec le théorème de Cantor. Par conséquent $E$ ne saurait exister.

*Remarque : on peut facilement montrer qu'il y a une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (cela résulte très immédiatement de la décomposition en base 10 des réels). La question 2 implique donc que l'infinité des réels est "plus grande" que l'infinité des entiers.*

$\boxed{\text{Spoil du chapitre "dénombrements"}}$

**Exercice 10.** On organise un tournoi de tennis de la façon suivante : on procède par tours et par élimination directe. À chaque tour, s'il y a un nombre pair de joueurs, chaque joueur affronte un autre joueur : les perdants sont définitivement éliminés, tandis que les gagnants sont sélectionnés pour le tour suivant. Si au contraire il y a un nombre impair de joueurs, un joueur est tiré au hasard et automatiquement qualifié pour le tour suivant ; les autres s'affrontent normalement.

Le tournoi dure assez longtemps, car au départ on ne compte ni plus ni moins que 1 234 joueurs. C'est beaucoup.

**À la fin du tournoi, combien de matches ont été disputés ?**

Notons $M$ l'ensemble des matchs disputés et $P$ l'ensemble des perdants du tournois. L'application $f : M \to P$ qui à un match associe le perdant du match est clairement bijective, puisque sa réciproque est l'application qui à un perdant associe le match lors duquel il a perdu (le dernier qu'il ait joué donc). Mais deux ensembles en bijection ont le même cardinal donc $|M| = |P| = 1233$, la dernière égalité signifiant simplement que tous les joueurs sauf un (le gagnant du tournoi) ont perdu.