Applications

objectif principal Comprendre les injections, bijections, surjections

I Généralités

1 Définitions. Exemples

def

Soient A, B deux ensembles. On appelle application de A dans B $f : A \to B$ un procédé associant à tout élément a de A un unique élément $f(a)$ dans B.

Deux applications $f, g : A \to B$ sont égales lorsque $\forall a \in A,\ f(a) = g(a)$.

eg fonctions réelles

Ce sont des applications de $P(\mathbb{R})$ dans $P(\mathbb{R})$

eg

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

eg les suites à valeurs dans E

Applications de $\mathbb{N}$ dans E

eg

$$c : \begin{cases} P(E) \longrightarrow P(E) \\ A \longmapsto \complement A \end{cases}$$

eg pour $u_0 \in \mathbb{R}^4$

La translation de vecteur u_0 est une appliation de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$

def

Soient A, B deux ensembles et $f \in B^A$.

Soient $a \in A$ et $b \in B$ tq $f(a) = b$

on dit b est l'image de a par f ou a est un antécédant de b par f.

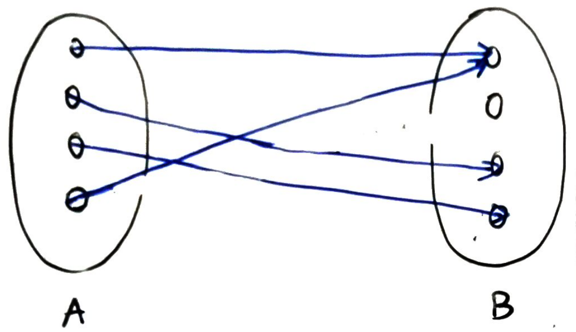
⚠ En général, une image existe tj et est unique mais un antécédent peut ne pas exister ou ne pas être unique

eg $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = x \mapsto x^2$

- 2 a plusieurs antécédants par f : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$
- -2 n'a pas d'antécédants par f

2 Représentation

remq représentation patatoïdale



def Graphe de f

Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$.

$$\mathcal{C}_f := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in A \times B,\ b = f(a) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix},\ a \in A \right\}$$

eg

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^2$ (le plan)

Le graphe de $c : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est le même que $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

mais $c \neq f$

Le graphe "ne voit pas" les ensembles d'arrivée

def prolongement & restriction

Soient A, A', C des ensembles tq $A \subset A'$ et $f : A \to B$ et $g : A' \to B$.

g est un prolongement de f à A' $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A,\ g(a) = f(a)$

$\Leftrightarrow f$ est une restriction de g à A

remq *Unicité et existance d'une restriction*

Si $g : A' \longrightarrow B$ avec $A' \supset A$

Alors l'unique restriction de g à A est

$$\begin{cases} A \longrightarrow B \\ a \longmapsto g(a) \end{cases}$$

notatn $g_{|A}$

eg *restriction à $\mathbb{R}_+$ de id^2*

Considerons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. f ná pas de fonction réciproque.

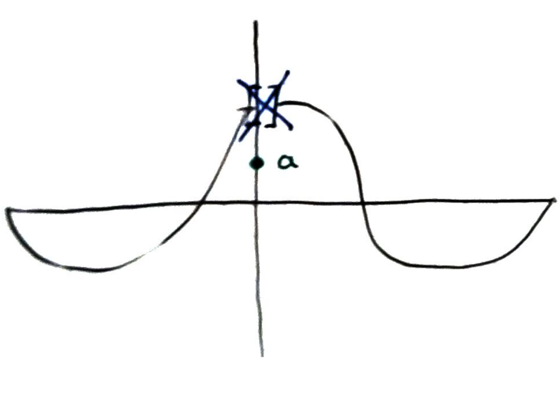
MAIS Sa restriction à $\mathbb{R}_+$ $f_{|\mathbb{R}_+}$ a une fonction réciproque.

eg

1 $\begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$ a pleins de prolongements à $\mathbb{R}$:

toutes les applications de la forme

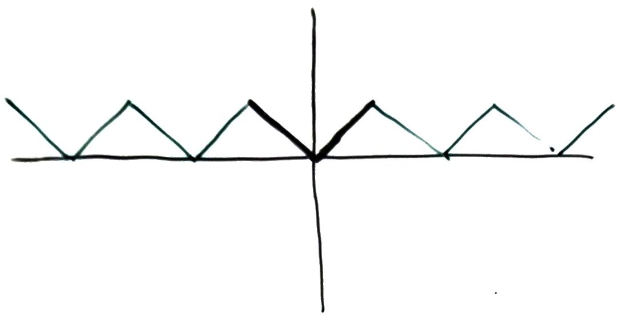
$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$



parmi tout ces prolongements, on a le prolongement par continuité par lequel la valeur en 0 est 1

⚠ Un prolongement existe toujours mais n'est jamais unique
Un prolongement n'existe pas toujours mais est tj unique

2 $\left\{\begin{array}{lcl} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$ peut se prolonger par périodicité sur $\mathbb{R}$



est $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ |x-2k| & \text{si } x \in [2k-1, 2k+1] \end{cases} \end{cases}$

ie $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left|x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right| \end{cases}$

car $2k-1 \leq x < 2k+1$

$\Leftrightarrow 2k \leq x+1 < 2k+2$

$\Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{2} < k+1$

<u>remq</u> On peut aussi écrire

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\operatorname{acos}(\cos(\pi x))}{\pi} \end{cases}$$

<u>remq</u> Une formule n'est pas tj une bonne description d'une application

<u>def</u> Soient A, B, B' trois ensembles tels que $B \subset B'$.

Si $f : A \to B$. On peut définir $g : A \to B'$:

$$g \begin{cases} A \longrightarrow B' \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

g est un coprolongement de f à B'

remq Un coprolongement est tj unique et existe tj

def

Soient A, B, B' trois ensembles tels que $B \subset B'$

Si $\begin{cases} g : A \longrightarrow B' \text{ et} \\ \{g(x), x \in A\} \subset B \end{cases}$ alors on peut définir une application

Alors on peut définir une application

$$f : \begin{cases} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto g(x) \end{cases}$$

f est appelée une corestriction de g à B

remq

Une correstriction n'existe pas toujours mais est toujours unique

notatn $g^{|B}$

eg

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ f n'a pas de réciproque mais

$f^{|\mathbb{R}_+}_{|\mathbb{R}_+}$ oui.

De même, acos n'est pas la fonction réciproque de

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{cases} \quad \text{mais de } \cos\Big|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} = \cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

II Composition - Réciproques

1 Structure catégorielle

def

Soient A, B, C trois ensembles.

Si $\begin{cases} f : A \to B \\ g : B \to C \end{cases}$ ie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

On apelle fonction composée $g \circ f$ l'application

$$\begin{cases} A \to C \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

remq

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{F}(B, C) \times \mathcal{F}(A, B) \to \mathcal{F}(A, C) \\ (g, f) \mapsto g \circ f \end{cases}$$

def

Soit A un ensemble. On apelle identité de A l'application $id_A : \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto x \end{cases}$

thm

Soient A, B, C, D des ensembles.

1 id_B est neutre à gauche pour $\circ$

$\forall f \in B^A,\ id_B \circ f = f$

id_A est neutre à droite pour $\circ$

$\forall f \in B^A,\ f \circ id_A = f$

2 $\circ$ est associative

$\forall f \in B^A, \forall g \in C^B, \forall h \in D^C,\ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

dem

1 Soit $f : A \to B$.

$id_B \circ f = x \mapsto id_B(f(x)) = x \mapsto f(x)$

$f \circ id_A = x \mapsto f(id_A(x)) = x \mapsto f(x)$

2 Soient f, g, h

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= x \mapsto h((g \circ f)(x)) \\ &= x \mapsto h(g(f(x))) \\ &= x \mapsto (h \circ g)(f(x)) \\ &= (h \circ g) \circ f \end{aligned}$$

2 Applications réciproques

def

Soient A, B deux ensembles et $f: A \to B$. On appelle application réciproque de f une application $g: B \to A$ tq

$$\begin{cases} g \circ f = id_A \\ f \circ g = id_B \end{cases}$$

remq

1 Une application réciproque n'existe pas toujours

dem 1 $f := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$. Supp $g := f^{-1}$. On a $f(0) = f(2\pi)$

On aurait $g(f(0)) = g(f(2\pi))$

$\Leftrightarrow 0 = 2\pi$ imp

2 Lorsqu'elle existe une application réciproque de f est unique : on le note f^{-1}

3 La notation f^{-1} indique l'inverse de f pour $\circ$

dem

2 Considérons deux réciproques g_1, g_2 de $f: A \to B$.

Mq $\forall x \in B, g_1(x) = g_2(x)$. Soit $x \in B$.

$$\begin{cases} g_1 \circ f = id_A \\ g_2 \circ f = id_A \end{cases} \Leftrightarrow \forall a \in A, \; g_1(f(a)) = g_2(f(a)) = a$$

En particulier, pour $a = g_1(x) \in A$

On obtient $g_1(f(g_1(x))) = g_1(x) = g_2(f(g_2(x)))$

or $f \circ g_1 = id$. $\qquad g_1(x) = g_2(f(g_1(x)))$

$$\Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x)$$

Meth 2 Considérons g_1, g_2 deux réciproques de $f: A \to B$

On sq $\begin{cases} g_1 \circ f = g_2 \circ f = id_A \\ f \circ g_1 = f \circ g_2 = id_B \end{cases}$

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1$$

par $\boxed{A}$ de $\circ$

prop

Soit $f: A \to B$ tq f^{-1}.

Alors $(f^{-1})^{-1} = f$

dem

$$(f^{-1})^{-1} = f^{-1 \times -1} = f^1 = f$$

eg

Pour les applications réelles on connaît moult applications ayant une réciproque:

- $(id)^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a une réciproque $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
- $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ a une réciproque $\text{atan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ a une réciproque $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

remq

Pour montrer qu'une fonction réelle (convenablement restreinte et costreinte) on utilise le théorème de la bij

III Bijection, injection, surjection

1 Bijectivité

def

Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$. On dit que f est bijective lorsque

$$\forall b \in B,\ \exists! a \in A,\ f(a) = b$$

ie $\forall$ élément de B a un unique antécédente par f.

thm

Soient A, B des ensembles et $f : A \to B$, alors f est bijective ssi f a une application réciproque.

dem

$\Rightarrow$: Supp f bijective.

Posons $\begin{cases} B \longrightarrow A \\ b \longmapsto \text{l'unique elt de } A \text{ tq } f(a) = b \end{cases}$

Montrons $g \circ f = id_A$ Soit $a \in A$ $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b)$
en prenant $b = f(a)$

Ainsi $g(b)$ est l'unique $\alpha \in A$ tq $f(\alpha) = b = f(a)$. Par unicité, $a = \alpha$

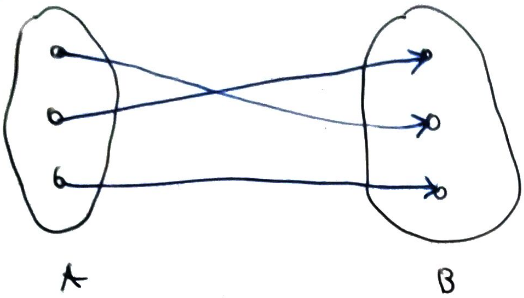
Donc $g \circ f(a) = g(b) = \alpha = id_A(\alpha)$

Montrons $f \circ g = id_B$

Soit $b \in B$. $f(g(b)) = f(a)$ où a est l'unique elt de A tq $f(a)=b$

donc $f(g(b)) = f(a) = b = id_B(b)$

remq Bijectivité sur la representation patatoïdale



Pour construire f^{-1} on inverse le sens des flèches

$\Leftarrow$: Supp f a une réciproque $f^{-1} : B \to A$.
On veut montrer $\forall b \in B,\ \exists! a \in A,\ f(a) = b$

$\exists$:
Posons $a = f^{-1}(b)$. $f(a) = f \circ f^{-1}(b)$

$= id_B(b)$

$= b$

$!$: Considérons deux antécédants a_1 et a_2 de b par f.

Ainsi $f(a_1) = b = f(a_2)$

donc $f(a_1) = f(a_2)$

On applique f^{-1} : $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$

ie $\underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{id_A}(a_1) = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{id_A}(a_2)$

ie $a_1 = a_2$

rappel

Pour A un ensemble on note S_A l'ensemble des bijections de A dans A

Pour $A = \{1, 2, .., n\}$ on note

S_n l'ensemble des bijections de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, 2, ... n\}$

eg $S_3 = \{id, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{2,3}, c, c^{-1}\}$

$|S_n| = n!$

de m̂, $|S_A| = |A|!$

thm

Soient A, B, C des ensembles et $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ bijectives

1 $g \circ f$ est bijective

2 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend left=40, "g \circ f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=40, "g^{-1} \circ f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

dem

2 f et g bijectives donc f^{-1} et g^{-1} existent

$h := f^{-1} \circ g^{-1}$. Mq $h = (g \circ f)^{-1}$

$$\begin{aligned}
h \circ g \circ f &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\
&= f^{-1} \circ id_B \circ f \\
&= f^{-1} \circ f \\
&= id_A
\end{aligned}$$

$$g \circ f \circ h = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$
$$= g \circ id_B \circ g^{-1}$$
$$= g \circ g^{-1}$$
$$= id_C$$

donc h est bien la réciproque de $g \circ f$, ie

$$(g \circ h)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$$

1 En particulier $g \circ f$

thm

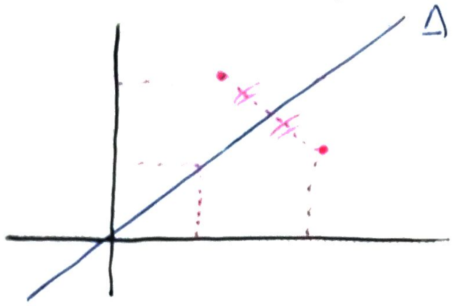
Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$ bijective
Alors le graphe de la réciproque

$$\mathcal{C}_{f^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} f(a) \\ a \end{pmatrix}, \ a \in A \right\}$$

dem

$$\mathcal{C}_{f^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ f^{-1}(b) \end{pmatrix}, \ b \in B \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \ a = f^{-1}(b) \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \ f(a) = b \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} f(a) \\ a \end{pmatrix}, \ a \in A \right\}$$

Le graphe de la réciproque d'une fonction réelle bijective s'obtient par symétrique d'axe Δ



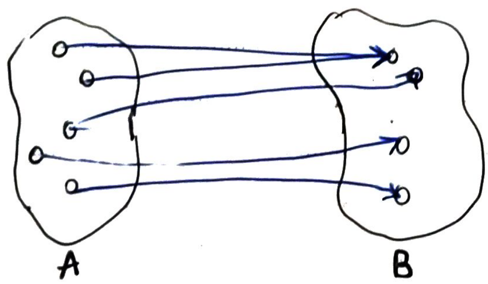
$$S_\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$$

2 Surjectivité

Soient A, B deux ensembles et $f : A \longrightarrow B$.
On dit que f est surjective lorsque tt élt de B a au moins un antécédant par f :

$$\forall b \in B, \ \exists a \in A, \ f(a) = b$$

remq



eg

1 $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ n'est PAS surjective : 2 n'a pas d'antécédant

$\begin{cases} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ EST subjective

2 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective : -666 n'a pas d'antécédent
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective

remq

Si $f : A \to B$ quelconque,
Notons $C = \{f(x), x \in A\}$
Alors $C \subset B$ et $f|^C$ est surjective

prop
Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$.

f surjective $\Leftrightarrow$ f a un inverse à droite
$\Leftrightarrow$ $g : B \to A$ tq $f \circ g = id_B$

dem copié-collé de la partie de la preuve de la bijectivité

thm
Soient A, B, C trois ensembles et $\begin{cases} f : A \to B \\ g : B \to C \end{cases}$ surjectives

Alors $g \circ f$ surjective

dem

[TD]

3 Injectivité

def

Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$

On dit que f est <u>surjective</u> lorsque

tout elt de B a au plus un antécédent par f :

$\forall b \in B, \forall (a_1, a_2) \in A^2, f(a_1) = f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$

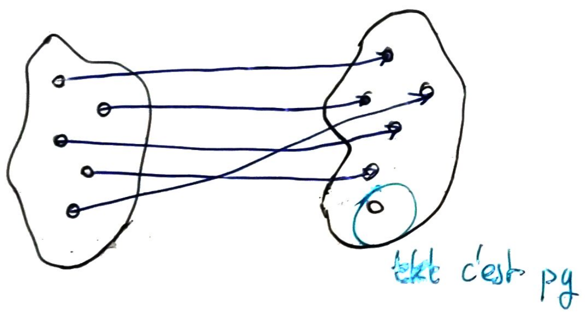
$\Leftrightarrow \quad \forall (a_1, a_2) \in A^2, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

remq

par contraposition :

f injective $\Leftrightarrow \forall (a_1, a_2) \in A^2, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

remq



eg

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective
- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pas injective

mais $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est injective

remq

On peut être injectif en restreignant mais il n'y a pas de formule générale

prop

Soient A, B des ensembles et $f : A \to B$

Supposons $A \neq \emptyset$

Alors f injective $\Leftrightarrow$ f a un inverse à gauche ie
une fonction $g : B \to A$
tq $g \circ f = id_A$

dem exercice

thm

Soient A, B, C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$ injectives

alors $g \circ f$ est injective

dem

[TD]

4 Applications au dénombrement

thm Soient A, B deux ens tq $\begin{cases} \#A \in \mathbb{N} \\ \#B \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. $\#A = \#B \Leftrightarrow$ il existe une bijection de A dans B
2. $\#A \leq \#B \Leftrightarrow$ il existe une injection de A dans B
3. $\#A \geq \#B \Leftrightarrow$ il existe une surjection de A dans B. (pour $B \neq \emptyset$)

dem en TD

rem q

Soient A, B deux ens. et $f : A \to B$.

f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et surjective

thm

Soient A, B tq $\#A = \#B \in \mathbb{N}$ et $f : A \to B$. Alors sont équivalents :

f bijective (b)
f injective (i)
f surjective (s)

dem

Notons $n := \#A = \#B$ et $\begin{cases} A := \{a_1, a_2, \dots a_n\} \\ B := \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \end{cases}$

(b) $\Rightarrow$ (i) ok!
(b) $\Rightarrow$ (s) ok!

Mq (s) $\Rightarrow$ (b). Supp f injective

Mq f surjective. On a $f(a_1), \dots, f(a_n) \in B$
et ce sont des elt distincts de B

Ainsi $\begin{cases} \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} \subset B \\ \#\{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = \#B \end{cases} \Rightarrow \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = B$

Mq (s) $\Rightarrow$ (b). Supp f surjective. Mq f injective.

f surjective donc $B \subset \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$

et donc $B \supset \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$

Or B a n éléments donc $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sont distincts

Donc $\forall i \neq j,\ f(a_i) \neq f(a_j)$

ie $\forall (a_i, a_j) \in A^2,\ a_i \neq a_j \Rightarrow f(a_i) \neq f(a_j)$

ie f est injective $\square$