Applications linéaires

Dans toute la feuille, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

Facile ?

Exercice -2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un sev de E.
Montrer : $\text{Ker}(f_{|G}) = \text{Ker}(f) \cap G$.

Exercice -1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
On note 0 l'application linéaire nulle de E dans G : montrer qu'on a $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$.

Exercice 0. *Linéaires ou pas ?*

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? S'agit-il d'endomorphismes, d'isomorphismes, de formes linéaires ?

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P''(0) + P(0)X^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P''(0) + P(0)^2 X. \end{array} \right.$$

Propriété fondamentale

Exercice 1. *Quelques endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.*

D'après le cours (récent ou imminent) , toute application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

À quoi sont donc égaux a, b, c, d lorsque...

1. ... f est l'homothétie (de centre O et) de rapport λ ?
2. ... f est la symétrie orthogonale d'axe Δ ?
3. ... f est la rotation (de centre O et) d'angle θ ?

Exercice 2.

Déterminer toutes les AL $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, s'il en existe, qui vérifient : $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. *Formes linéaires ayant la propriété fondamentale de la trace.*

On rappelle que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et vérifie la propriété $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.

On suppose maintenant disposer d'une forme linéaire $\phi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$ telle qu'on ait $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA)$.

Montrez que ϕ est proportionnelle à la trace.

Exercice 4. *Propriété fondamentale généralisée*

Déterminer toutes les applications linéaires $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il en existe, pour lesquelles une matrice antisymétrique a pour image son double et pour lesquelles une matrice symétrique a pour image son triple.

Image, noyau.

Exercice 5. *Reprenons l'exercice* **??**
Déterminer l'image et le noyau des applications de l'exercice **??** qui sont linéaires, s'il y en a.

Exercice 6. *Nouveau formalisme pour le même exercice*
Déterminer une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}3x+z+2t\\4x+3z+t\\3(x+t)\\x+3z-2t\end{pmatrix}\end{array}\right.,\quad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K}^4\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x-y+z\\-2x-4z+4t\\y+z-2t\\3x-2y+4z-2t\end{pmatrix}\end{array}\right.,\quad h:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X]\\ P(X)=\sum_{k=0}^{\deg(P)}a_kX^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{n}a_kX^k\end{array}\right..$$

Exercice 7. Soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Montrer qu'on a :

1. $\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow Im(f)\cap\mathrm{Ker}(g)=\{0_F\}$;
2. $\mathrm{Im}(g\circ f)=Im(g)\Leftrightarrow Ker(g)+Im(f)=F$.

Formes linéaires et hyperplans.

Exercice 8. *Formes linéaires non nulles.*
On considère une forme linéaire f **non nulle**. Montrer que f est surjective.

Exercice 9. Dans cet exercice on suppose avoir $E=\mathbb{K}[X]$ et on se donne $a\in\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\phi:\left\{\begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{K}\\ P & \mapsto & P(a)\end{array}\right.$ est une forme linéaire non nulle.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Exercice 10. Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer :

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)\ \Leftrightarrow\ (f,g)\text{ est liée dans }E^*.$$

Propriétés du rang

Exercice 11. *Inégalité triangulaire pour le rang*
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Montrer qu'on a $\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.

Exercice 12.
Soient $p,\ q\in\mathbb{N}$. Soient $A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On suppose que AB et BA sont inversibles. Qu'en déduire ?

AL en dimension finie.

Exercice 13. *Équations matricielles*
Résoudre les équations d'inconnue $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ suivantes :

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

On pourra, sans obligation d'achat, s'intéresser à l'endomorphisme f_A.

Exercice 14. *Racine de l'unité dans $\mathcal{L}(E)$.*

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, on suppose avoir un endomorphisme f tel que $f^p = id_E$ où p est un entier strictement positif donné.

On notera $g = id_E + f + f^2 + \ldots + f^{p-1}$ et $h = f - id_E$.

1. (a) Calculer $Ker(g) \cap Ker(h)$.
   (b) En déduire qu'on a $\dim(Ker(g)) + \dim(Ker(h)) \leqslant n$.
2. (a) Montrer qu'on a $Im(g) \subset Ker(h)$.
   (b) En déduire qu'on a $\dim(Ker(g)) + \dim(Ker(h)) \geqslant n$.
3. Que peut-on conclure sur $Ker(g)$ et $Ker(h)$?

Le résultat demeure en dimension quelconque... pour les courageux !

Homothéties. Nilpotents.

Exercice 15. *Pseudo-nilpotents*

On appelle *endomorphisme pseudo-nilpotent* tout endomorphisme f de E tel que : $\forall x \in E, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{n_x}(x) = 0$.

1. Quelle est la différence entre la définition d'un endomorphisme pseudo-nilpotent et celle d'un endomorphisme nilpotent ?
2. Montrez que tout endomorphisme nilpotent est pseudo-nilpotent.
3. Montrez à l'aide d'un exemple qu'il peut en général exister des endomorphismes pseudo-nilpotents qui ne sont pas nilpotents.
4. Montrez que, si E est de dimension finie, tout endomorphisme pseudo-nilpotent est nilpotent.

Exercice 16. *Caractérisation des homothéties*

On appelle *pseudo-homothétie* tout endomorphisme f de E tel que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.

1. Quelle est la différence entre la définition d'une pseudo-homothétie et celle d'une homothétie ?
2. Montrez que toute homothétie est une pseudo-homothétie.
3. Montrez que toute pseudo-homothétie est une homothétie.
4. Application : Déterminez l'ensemble des endomorphismes u tels que $\forall f \in \mathcal{L}(E), f \circ u = u \circ f$.
   On **admettra** *que tout sous-espace vectoriel admet toujours un supplémentaire (résultat vu en dimension finie).*

Projections. Symétries.

Exercice 17. *Projections*

1. Montrez que $p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y-2z \\ -2x-y-4z \\ x+y+3z \end{pmatrix}$ est une projection, et précisez la somme directe associée.
2. On note $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x+y+z=0 \right\}$ et $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$.
   Justifier qu'on a $F_2 \oplus G_2 = \mathbb{K}^3$ puis décrire la projection sur F_2 parallèlement à G_2.

Exercice 18. *Symétries*

1. Montrez que $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y+2z \\ -2x-2y-3z \end{pmatrix}$ est une symétrie, et précisez la somme directe associée.
2. Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x+y=0 \right\}$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, après avoir monté que ces sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires.

Exercice 19. *Somme de projections*

1. Soient p_1 et p_2 deux projections de E.
   Montrer que $p_1 + p_2$ est une projection si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

2. Soient p et q deux projections tels que $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.
   Montrer que r est un projection de noyau $Ker(p) \cap Ker(q)$ et d'image $Im(p) \oplus Im(q)$.

3. On suppose $\dim(E) = n < +\infty$. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u+v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) \leqslant n$.
   Montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) = E$ et $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v) = E$, que u et v sont des projections, et calculer $u \circ v$ et $v \circ u$.