Images et noyaux itérés

Le résultat sur les images et noyaux itérés est un classique incontournable sur les endomorphismes.

On va utiliser ici la version sur les noyaux pour redémontrer le théorème vu en TACMAS sur la majoration de l'indice de nilpotence d'une matrice. Encore une fois, l'illustration que la théorie a des applications concrètes.

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

On fait le travail sur les noyaux...

Q1 Montrer que la suite $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

Q2 Montrer que, si la suite $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ fait une pause, alors elle stationne.

Remarque : on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait une pause s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $u_{i+1} = u_i$.

Rappel : on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant i,\ u_n = u_i$.

Q3 Montrer que, si $\dim(E) < +\infty$, alors $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ stationne, au plus tard à partir du rang $\dim(E)$.

Q4 Donner un exemple, en dimension infinie, pour lequel $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas.

Q5 APPLICATION : On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence N. En considérant l'endomorphisme $f_A : x \mapsto Ax$ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, montrer qu'on a $N \leqslant n$ (théorème vu en TACMAS).

Bis repetita placent sur les images...

Q1' Montrer que la suite $(Im(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Q2' Montrer que, si la suite $(Im(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ fait une pause, alors elle stationne.

Q3' Montrer que, si $\dim(E) < +\infty$, alors $(Im(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ stationne, au plus tard à partir du rang $\dim(E)$.

Q4' Donner un exemple, en dimension infinie, pour lequel $(Im(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas.

ACT M KERITER

$\boxed{1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \operatorname{Ker} f^n$

ie $f^n(x) = 0_E$

donc $f \circ f^n(x) = f(0_E)$

ie $f^{n+1}(x) = 0_E$ par linéarité et caractère endomorphe

donc $x \in \operatorname{Ker}(f^{n+1})$

alors $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$

$\boxed{2}$ On suppose qu'il existe i tel que $\operatorname{Ker} f^{i+1} = \operatorname{Ker} f^i$

ie $\operatorname{Ker} f^{i+1} \subset \operatorname{Ker} f^i$ d'après 1

On veut montrer $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{Ker} f^{i+k} = \operatorname{Ker} f^i$

Montrons-le par récurrence

Init ($k = 0$):

On a bien $\operatorname{Ker} f^i \subset \operatorname{Ker} f^i$ par def de $=_{\mathcal{P}(E)}$

Her Soit $k \in \mathbb{N}$. Supp $\operatorname{Ker} f^{i+k} \subset \operatorname{Ker} f^i$. Mq $\operatorname{Ker} f^{i+k+1} \subset \operatorname{Ker} f^i$

Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{i+k+1}$

ie $f^{i+k+1}(x) = 0_E$

donc $f^{i+1}(f^k(x)) = 0_E$

ie $f^k(x) \in \operatorname{Ker} f^{i+1} = \operatorname{Ker} f^i$

donc $f^i(f^k(x)) = 0_E$

donc $f^{i+k}(x) = 0_E$

donc $x \in \operatorname{Ker} f^{i+1}$

donc ok!

$\boxed{3}$

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} f^0 \subset \operatorname{Ker} f^1 \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^{\dim E} \subset \operatorname{Ker} f^{\dim E+1} \subset E$$

$$0 = \dim \operatorname{Ker} f^0 \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^1 \leqslant \cdots \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^{\dim E+1} \leqslant \dim E$$ car $\dim E \nearrow$

$\delta := \dim \operatorname{Ker} f^{\cdot}$ $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

$$\underbrace{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\dim E+1}}_{\dim E + 2 \text{ chaussettes}} \in \underbrace{[\![0, \dim E]\!]}_{\dim E + 1 \text{ tirroirs}}$$

D'après le principe des tirroires il existe $i<j$ tq $\delta_i = \delta_j$

Mais comme

$$\delta_i \leqslant \delta_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant \delta_j = \delta_i$$

Par antisymétrie, $\delta_i = \delta_{i+1}$ ie $\dim \operatorname{Ker} f^i = \dim \operatorname{Ker} f^{i+1}$

or $\operatorname{Ker} f^i \subset \operatorname{Ker} f^{i+1}$

ACTM KER ITER

donc $\mathrm{Ker}\, f^{i} = \mathrm{Ker}\, f^{i+1}$ par ppté fonda. des sevs en dim $< +\infty$

donc $(\mathrm{Ker}\, f^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ fait une pause

au rang $i \leqslant \dim E$ $(i < j \leqslant \dim E)$

D'après 2.,

$(\mathrm{Ker}\, f^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ stationne à partir du rang $i \leqslant \dim E$

$\boxed{4}$ Considérons $\bullet' : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$. On a bien

$\#\mathrm{src}\ \bullet' = \#\mathrm{but}\ \bullet' = +\infty$.

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\ \bullet' = \mathbb{K}_0[X] \\ \mathrm{Ker}\ \bullet'' = \mathbb{K}_1[X] \\ \vdots \\ \mathrm{Ker}\ \bullet^{(n)} = \mathbb{K}_{n-1}[X] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{K}_0[X] \\ \subsetneq \mathbb{K}_1[X] \\ \vdots \\ \subsetneq \mathbb{K}_{n-1}[X] \end{cases}$$

donc $(\mathrm{Ker}\ \bullet^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas.

$\boxed{5}$ A nilopente d'indice N ie

$$\begin{cases} \forall k < N, A^k \neq (0)_n \\ \forall k \geq N, A^k = (0)_n \end{cases}$$

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto Ax \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$$

Par intégrité:

$\operatorname{Ker} f_A = \{(0)_n\} \neq \mathbb{K}_n$ car $A \neq (0)_n$ par nilpot.

$\vdots$

$\operatorname{Ker} f_A^{N-1} = \{(0)_n\} \neq \mathbb{K}_n$ car $A \neq (0)_n$ par nilpot.

$\operatorname{Ker} f_A^N = \mathbb{K}_n$ car $A = (0)_n$ par nilpot.

$\vdots$

Comme $\operatorname{Ker} f_A^{N-1} \subsetneq \operatorname{Ker} f_A^N$, $(\operatorname{Ker} f_A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne stationne pas avant $n = N$

D'après 3., $N \leq n$

$\boxed{1'}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $y \in \operatorname{Im} f^{n+1}$ ie $\overset{\text{def}}{\exists} x \in E,\ f^{(n+1)}(x) = y$

$$f^{n}(x) = y \iff f^{n}(f(x)) = y \in E$$

$$\iff f^{n}(z) = y \qquad \text{pour } z \in E$$

$$\Rightarrow y \in \operatorname{Im} z$$