Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définition et opérations sur les applications linéaires

I.1 Définitions - Exemples

Proposition-Définition 1 : Application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Pour une application $f : E \to F$ on a équivalence entre :

1. f préserve les sommes et les multiplications par un scalaire, i.e. :
   - $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
   - $\forall u, v \in E,\ f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. f préserve les combinaisons linéaires, i.e. :
   $\forall (u, v) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

On dit alors que f est une application linéaire. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

I.2 (Co)restriction

Proposition 1 .

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev, G un sev de E et H un sev de F.
Si $f : E \to F$ est linéaire et $f(G) \subset H$, alors $f_{|G}^{|H} : G \to H$ est linéaire.

I.3 Stabilité par combinaison linéaire

Théorème 1 .

Si f et g sont linéaires alors $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

Théorème 2 : Reformulation.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de F^E. En particulier, $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2 .

On appelle homothétie vectorielle de rapport λ, ou plus simplement homothétie de rapport λ l'application $\lambda \mathrm{id}_E : E \to E$. C'est une application linéaire.
On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie lorsque $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(u) = \lambda u$, i.e. $f = \lambda \mathrm{id}$.

I.4 Composition

Théorème 3 .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 2 .

Soit $h \in F^E$ (une application quelconque !).
La composition par h à droite est distributive sur l'addition et compatible avec la multiplication externe :

1. $\forall f, g \in G^F,\ (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$;
2. $\forall f \in G^F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda f) \circ h = \lambda (f \circ h)$.

Remarquons que ces deux propriétés peuvent être synthétisées en une :
$\forall f, g \in G^F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda (f \circ h) + \mu (g \circ h)$.

Théorème 4 .

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev et $h \in F^E$. L'application de précomposition par h $\left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array} \right.$ est linéaire.

Proposition 3 .

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-ev et $h \in G^F$. Supposons h linéaire.
Alors la composition par h à gauche est distributive sur l'addition et compatible avec la multiplication externe :

1. $\forall f, g \in F^E,\ h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$.
2. $\forall f \in F^E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ h \circ (\lambda f) = \lambda(h \circ f)$.

Ou encore : $\forall f, g \in F^E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda(h \circ f) + \mu(h \circ g)$.

Théorème 5 .

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-ev **et $h \in \mathcal{L}(F, G)$**. L'application de postcomposition par h $\left\{\begin{array}{ccc} F^E & \to & G^E \\ f & \mapsto & h \circ f \end{array}\right.$ est linéaire.

Corollaire 1 .

Bilan : $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ forme une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ\big)$ forme un anneau.

Définition 3 .

On dit qu'une application linéaire est un un endomorphisme de E lorsque c'est une application d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même. On notera $\mathcal{L}(E)$ plutôt que $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Corollaire 2 .

On peut appliquer un polynôme à un endomorphisme. On obtient un endomorphisme.

I.5 Réciproque

Théorème 6 .

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Définition 4 .

Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.

Notation 1

S'il existe un isomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, on dit que E et F sont isomorphes.

Remarque 1

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et isomorphes, alors ils ont la même dimension.

I.6 Groupe linéaire

Définition 5 .

On dit qu'une application linéaire est un automorphisme de E lorsque c'est un isomorphisme de E dans E.
En bref : « auto = endo + iso ». On notera $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème-définition 7 .

En particulier $\big(GL(E), \circ\big)$ forme un groupe. On l'appelle le groupe linéaire de E.

I.7 Formes linéaires

Définition 6 .

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans le corps de base $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire sur E.
On notera E^* plutôt que $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

II Propriété fondamentale

II.1 Exemple des droites.

Lemme 1 .

Soit D une droite (i. e. un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1).
Une application $f : D \to D$ est linéaire si et seulement si c'est une homothétie.

II.2 Exemple de $\mathbb{K}^n$

Proposition 4 .

Soit $f : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$; f est linéaire si et seulement s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que $f = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^q & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & A \times x. \end{array} \right.$

Autrement dit, f est linéaire si et seulement s'il existe des scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ pour lesquels on peut écrire

$$f = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^q & \to & \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,q}x_q \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,q}x_q \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Remarque 2

Du coup, « dans $\mathbb{R}^n$ », toute application linéaire se représente canoniquement par une matrice [1], mais on a vu qu'un espace de dimension finie quelconque pouvait être ramené à $\mathbb{R}^n$ en le munissant d'une base : il sera donc possible en dimension finie, et pas seulement dans $\mathbb{R}^n$, de représenter les applications linéaires par des matrices. On verra plus tard, hein. Quant au cas de la dimension quelconque, on ne peut plus parler de matrice, mais on peut faire pareil quand même, c'est l'objet du paragraphe suivant.

II.3 Cas général

Théorème 8 : Propriété fondamentale des applications linéaires.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement et uniquement déterminée par ses valeurs sur une base de E.

Autrement dit : soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors, pour toute famille $(y_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in I,\ f(\varepsilon_i) = y_i$.

II.4 Définition par restrictions

Théorème 9 : Propriété fondamentale généralisée.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ des sevs de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p = E$.
Soient $\varphi_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, $\varphi_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, ..., $\varphi_p \in \mathcal{L}(E_p,F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\varphi_{|E_i} = \varphi_i$.

III Noyau, image et rang

III.1 Image et noyau

Définition 7 : Rappel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\} \subset E$.
- On appelle image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\} \subset F$.

Théorème 10 : Rappel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f surjective $\Leftrightarrow F \subset \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Remarque 3 On peut parler d'image ou noyau d'une matrice ; cela signifie image ou noyau de l'application linéaire canoniquement associée. (Voir juste au-dessus)

Théorème 11 .

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel F.

1. Et du coup on connaissait déjà. Boring.

III.2 Rang

Notation 2 Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $f(\mathcal{F})$ la famille obtenue en appliquant f aux vecteurs de $\mathcal{F}$. Ainsi, pour $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$, on a $f(\mathcal{F}) = \big(f(u_i)\big)_{i\in I}$.

Définition 8 .

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la quantité $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Théorème 12 .

Le rang de f est un rang ! Plus précisément, pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(f(\mathcal{B})\big)$.

Théorème 13 : Propriétés "immédiates" du rang.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$, et, de plus :
3. si f est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g)$ et si g est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f)$. i. e. composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

III.3 Équations d'un hyperplan

Théorème 14 .

Les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.

Définition 9 .

Soit H un hyperplan de E. On appelle équation de H une expression de la forme $\phi(x) = 0$ où ϕ est une forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(\phi) = H$. D'après le théorème **??**, tout hyperplan a une équation.

III.4 Théorème d'isomorphisme

Théorème 15 : Théorème d'isomorphisme.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\mathrm{Im}(f)}$ est bien définie et c'est un isomorphisme.
On dit que f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

IV Applications linéaires en dimension finie

IV.1 Théorème du rang

Théorème 16 : formule du rang.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. **On suppose que E est de dimension finie.** Alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(E)$ i. e. $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

IV.2 Applications immédiates du théorème du rang

IV.3 Théorème du rang et *jectivité

Théorème 17 : Caractérisation par le rang.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors on a :

i/ f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$;
ii/ f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$;
iii/ f est bijective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Théorème 18 : Caractérisation des isomorphismes.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalentes :

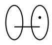
i/ f est injective ;

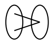
ii/ f est surjective ;

iii/ f est un isomorphisme.

Remarque 4

On a un analogue ensembliste : Soit A, B deux ensembles tels que $\#A = \#B := n \in \mathbb{N}$.
Alors

$f : A \to B \in$ 

$\Leftrightarrow f \in$ 

$\Leftrightarrow f \in$ 

Théorème 19 : Caractérisation des automorphismes.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

i/ f est inversible à gauche ;

ii/ f est inversible à droite ;

iii/ f est un automorphisme.

IV.4 Deux applications de la théorie au calcul matriciel

V Endomorphismes remarquables

V.1 Endomorphismes nilpotents

Définition 10 .

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent lorsque c'est un élément nilpotent de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
L'unique entier p tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ s'appelle l'indice de nilpotence de f.

Proposition 5 .

Si $\dim(E) < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors l'indice de nilpotence de f est plus petit que $\dim(E)$.

V.2 Projections

Remarque 5

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $p_G^F = \mathrm{id}_E - p_F^G$;

ii/ $p_G^F \circ p_F^G = p_F^G \circ p_G^F = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 6 : Propriétés immédiates des projections.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $\mathrm{Ker}(p_F^G) = G$;

ii/ $\mathrm{Im}(p_F^G) = F$;

iii/ $p_F^G \circ p_F^G = p_F^G$.

Théorème 20 : :mind_blown :.

Si p est un endomorphisme idempotent, alors p est une projection.

C'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

V.3 Symétries

Proposition 7 : Propriétés immédiates des projections.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $\mathrm{Ker}(s_F^G - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_F^G + \mathrm{id}_E) = F$;

ii/ $\mathrm{Ker}(s_F^G + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_F^G - \mathrm{id}_E) = G$;

iii/ $s_G^F = -s_F^G$;

iv/ $s_F^G = p_F^G - p_G^F$;

v/ $s_F^G \circ s_F^G = \mathrm{id}_E$.

Théorème 21 .

Si s est un endomorphisme involutif, alors s est une symétrie.

C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.