Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définition et opérations sur les applications linéaires

I.1 Définitions - Exemples

Rappels de l'épilogue du cours sur les structures : les applications linéaires sont les « morphismes d'espace vectoriel », on peut donc les caractériser au choix par une des deux caractérisations équivalentes suivantes :

Proposition-Définition 1 : Application linéaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Pour une application $f : E \to F$ on a équivalence entre :

1. f préserve les sommes et les multiplications par un scalaire, i. e. :
   - $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
   - $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. f préserve les combinaisons linéaires, i. e. :
   $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

On dit alors que <u>f est une application linéaire</u>. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda u) + f(\mu v) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\begin{aligned} f(\mu v) &= f(0u + \mu v) \\ &= 0f(u) + \mu(v) \\ &= \mu f(v) \\ f(u+v) &= f(1u + 1v) \\ &= 1f(u) + 1f(v) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

□

Exemple 1 Pour tout $\mathbb{K}$-ev E, $\mathrm{id}_E : E \to E$ est une application linéaire !

Exemples 2 Quelques exemples que l'on a déjà rencontrés avec ou sans démonstration :

- Considérons $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 2).
  La conjugaison $\mathrm{conj} = z \mapsto \overline{z}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: cf cours sur $\mathbb{C}$.
- La transposition est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$: cf Tacmas sur les matrices.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application de décomposition dans la base $\mathcal{B}$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$: cf chapitre sur la dimension finie.
- La dérivation des polynômes est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. Même chose pour la dérivation de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^I$ ou de $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, « intégration entre a et b » $\displaystyle\int_a^b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{array} \right.$, qu'on appelle par abus « l'intégrale », est une application linéaire de $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples 3 Quelques contre-exemples :

1. Si l'on voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension 1), la conjugaison **n'est pas** une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. En effet, on a par exemple $-1 = \mathrm{conj}(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \neq \mathbf{i}\mathrm{conj}(\mathbf{i}) = 1$.
2. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ n'est pas linéaire pour $n \geqslant 2$. En effet on a : $\det(2I_n) = 2^n \neq 2 = 2\det(I_n)$.

Exemples 4 À vous

$$\mathrm{Tr} = \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ M & \mapsto \mathrm{Tr}\, M \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto z^n \end{cases} \text{ où } n \geq 2 \text{ est fixé}$$

n'est pas linéaire car en général $(z_1 + z_2)^n \neq z_1^n + z_2^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \begin{cases} \text{séries convergentes} & \to \mathbb{R} \\ \sum_{n \geq 0} u_n & \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \end{cases}$$

est linéaire d'après le cours sur les séries.

$$< \cdot, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} > = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto ax + by + cz \end{cases}$$

est linéaire.
L'application utilisée dans le corrigé du $\boxed{\text{CCINP 55}}$:

$$\begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

est linéaire,car

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \phi(\lambda u + \mu v) &= \phi((\lambda u_n + \mu v_n)_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_0 + \mu v_0 \\ \lambda u_1 + \mu v_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\phi(u) + \mu\phi(v) \end{aligned}$$

Variante $\boxed{\text{CCINP 87}}$

$$\begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \begin{pmatrix} P(\alpha_0) \\ \vdots \\ P(\lambda_n) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est linéaire.
(Dans les deux cas on est ramenné au fait que l'évaluation est une application linéaire)
Première méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on revient à la définition. C'est ce qu'on a fait pour les exemples 2. Remarquons que cette "première méthode" donne en fait déjà deux méthodes.

Exemple 5 Montrons que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $M = (m_{ij}), A = (a_{ii}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\lambda M + \mu A) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda m_{ii} + \mu a_{ii} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{ii} + \mu \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \\ &= \lambda \operatorname{Tr} M + \mu \operatorname{Tr} A \end{aligned}$$

I.2 (Co)restriction

Proposition 1 .
Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev, G un sev de E et H un sev de F.
Si $f : E \to F$ est linéaire et $f(G) \subset H$, alors $f_{|G}^{|H} : G \to H$ est linéaire.

DÉMONSTRATION. Évident ! □

En général, on note encore f l'application $f_{|G}^{|H}$: le contexte permet de déterminer de quelle application on parle précisément.

Deuxième méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on montre que c'est la (co)restriction d'une application linéaire.

Exemple 6 Montrons que $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R} \\ P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i & \mapsto \sum_{i=0}^{\deg(P)} \frac{a_i}{i+1} \end{cases}$ est linéaire.
On identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'espace des fonctions polynomiales.
ψ est la restriction à $\mathbb{R}[X]$ de

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_0^1 f \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \\ \psi P &= \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{} \\ &= \int_0^1 a_0 dt + \int_0^1 a_1 t dt + \cdots + \int_0^1 a_n t^n dt \\ &= \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) dt \end{aligned}$$

Or $\tilde{\psi} = \int_0^1$ est linéaire donc ψ est linéaire comme restriction d'une AL [1].

I.3 Stabilité par combinaison linéaire

Dans ce paragraphe, on se donne E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f, g : E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On rappelle que par définition, on a : $\lambda f + \mu g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \right.$.

Théorème 1 .

Si f et g sont linéaires alors $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

DÉMONSTRATION. On veut montrer que $\lambda f + \mu g$ est linéaire.
Soient $x, y \in E$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) \\ &= \lambda(\alpha f(x) + \beta g(y)) + \mu(\alpha f(x) + \beta g(y)) \\ &= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + \beta(\mu f(y) + \lambda f(y)) \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y)\end{aligned}$$

Donc $\lambda f + \mu g$ est bien linéaire. □

Théorème 2 : Reformulation.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de F^E. En particulier, $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Troisième méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on montre que c'est une combinaison linéaire d'applications linéaires connues.

Exemple 7

$$\theta = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a & (2b - c) \\ (2c - b) & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - a & 2b - c \\ 2c - b & 2d - d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On a $\phi = 2\,\mathrm{id} - {}^t\cdot$ donc ϕ est une AL car $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev.

Définition 2 .

On appelle homothétie vectorielle de rapport λ, ou plus simplement homothétie de rapport λ l'application $\lambda \mathrm{id}_E : E \to E$. C'est une application linéaire.
On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie lorsque $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(u) = \lambda u$, i.e. $f = \lambda \mathrm{id}$.

I.4 Composition

Dans ce paragraphe, on se donne E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 3 .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

DémonstrationSoient $u \in E$, $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)\big(\lambda u + \mu v\big) & = & g\big(f(\lambda u + \mu v)\big) & \text{par définition,} \\ & = & g\big(\lambda f(u) + \mu f(v)\big) & \text{par linéarité de } f, \\ & = & \lambda g\big(f(u)\big) + \mu g\big(f(v)\big) & \text{par linéarité de } g, \\ & = & \lambda (g \circ f)(u) + \mu (g \circ f)(v) & \text{par définition.} \end{array}$$

D'où la linéarité. □

1. application linéaire

Démonstration.

□

Quatrième méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on montre que c'est une composée d'applications linéaires.

Exemple 8 L'application $\gamma : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P^{(n)}(0) \end{array}\right.$ est linéaire. En effet :

Rappel

$$\cdot' : \begin{cases}\mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P'\end{cases}, \mathrm{eval}_0 : \begin{cases}\mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(0)\end{cases} \in \mathcal{L}$$

On a bien $\gamma = \mathrm{eval}_0 \circ \bigcirc_{k=0}^{n} \cdot'$ donc $\gamma \in \mathcal{L}$.

Nano-remarque On retrouve que

$$\phi : \begin{cases}\mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K} \\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\end{cases}$$

Cas pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $k \in [\![0, n]\!]$

$$P^{(k)}(0) = k! a_k$$

Donc pour $i \in [\![0, n]\!]$

$$a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$$

donc $\begin{cases}\mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K} \\ P & \mapsto \sum_{k=i}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{(i+1)!}\end{cases}$ est une CL d'AL donc une AL.

Proposition 2 .

Soit $h \in F^E$ (une application quelconque !).

La composition par h à droite est distributive sur l'addition et compatible avec la multiplication externe :

1. $\forall f, g \in G^F,\ (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$;
2. $\forall f \in G^F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda f) \circ h = \lambda (f \circ h)$.

Remarquons que ces deux propriétés peuvent être synthétisées en une :

$\forall f, g \in G^F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda (f \circ h) + \mu (g \circ h)$.

DémonstrationOn montre l'énoncé unificateur. Soient $f, g \in G^F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $u \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \big((\lambda f + \mu g) \circ h\big)(u) & = & (\lambda f + \mu g)\big(h(u)\big) & \text{par définition de } \circ, \\ & = & \lambda f\big(h(u)\big) + \mu g\big(h(u)\big) & \text{par définition des opérations,} \\ & = & \lambda (f \circ h)(u) + \mu (g \circ h)(u) & \text{par définition de } \circ, \\ & = & \big(\lambda (f \circ h) + \mu (g \circ h)\big)(u) & \text{par définition des opérations,} \end{array}$$

et ceci étant vrai pour tout $u \in E$, on a bien l'égalité voulue. □

DÉMONSTRATION.

□

Observons que, par définition de la linéarité, cette proposition peut se reformuler ainsi :

Théorème 4 .

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev et $h \in F^E$. L'application de <u>précomposition par h</u> $\left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array} \right.$ est linéaire.

/!\ Attention, on n'a rien de tel lorsqu'on compose à gauche !
Contre-exemple $E = F = G = \mathbb{R}$, $f = g = x \mapsto x$, $h = x \mapsto x^2$.
Par contre :

Proposition 3 .

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-ev et $h \in G^F$. <u>Supposons h linéaire.</u>
Alors la composition par h à gauche est distributive sur l'addition et compatible avec la multiplication externe :

1. $\forall f, g \in F^E,\ h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.
2. $\forall f \in F^E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ h \circ (\lambda f) = \lambda (h \circ f)$.

Ou encore : $\forall f, g \in F^E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda (h \circ f) + \mu (h \circ g)$.

DémonstrationOn montre l'énoncé unificateur. Soient $f, g \in G^F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $u \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \big(h \circ (\lambda f + \mu g)\big)(u) & = & h\big(\lambda f(u) + \mu g(u)\big) & \text{par définition de } \circ, \\ & = & \lambda h\big(f(u)\big) + \mu h\big(g(u)\big) & \text{par linéarité de } h, \\ & = & \lambda (h \circ f)(u) + \mu (h \circ g)(u) & \text{par définition de } \circ, \\ & = & \big(\lambda (h \circ f) + \mu (h \circ g)\big)(u) & \text{par définition des opérations,} \end{array}$$

et ceci étant vrai pour tout $u \in E$, on a donc bien l'égalité voulue. □

Démonstration. □

Observons que, par définition de la linéarité, cette proposition peut se reformuler ainsi :

Théorème 5 .

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-ev <u>**et $h \in \mathcal{L}(F, G)$**</u>. L'application de <u>postcomposition par h</u> $\left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \to & G^E \\ f & \mapsto & h \circ f \end{array} \right.$ est linéaire.

Nous utiliserons des résultats précédents essentiellement uniquement la petite partie suivante :

Corollaire 1 .

Bilan : $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ forme une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ\big)$ forme un anneau.

Définition 3 .

On dit qu'une application linéaire est un <u>un endomorphisme de E</u> lorsque c'est une application d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même. On notera <u>$\mathcal{L}(E)$</u> plutôt que <u>$\mathcal{L}(E, E)$</u> l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples 9 Reprenons les exemples précédents.

— $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ est toujours un endomorphisme

— $\bar{\cdot}$ est un endomorphisme

— ${}^t\cdot$ est un endormophisme ssi $p = q$

— $\left| \cdot \right|_{\mathcal{B}}$ est un endomorphisme ssi $E = \mathbb{K}^n$

— $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme

— $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^I$ n'est <u>pas</u> un endomorphisme

— $\int_a^b : \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ n'est pas un endomorphisme

— Suite de l'exo 0 : les deux premiers sont des endomorphismes

— Tr n'est pas un endomorphisme

— $\begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ n'est pas un endomorphisme

— Pour h linéaire, la précomposition par h

$$\begin{cases} G^F & \to G^E \\ f & \mapsto f \circ h \end{cases}$$

est un endomorphisme ssi $E = F$ ie ssi h est un endomorphisme

Tout polynôme peut s'appliquer à tout élément de toute algèbre. En particulier :

Corollaire 2 .

On peut appliquer un polynôme à un endomorphisme. On obtient un endomorphisme.

Exemple 10 $P(X) = X^2 + X + 1$ appliqué à $f \in \mathcal{L}(E)$ donne $P(f) = f \circ f + f + \mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$

Cinquième méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on montre qu'elle est de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Cette méthode n'est adaptée qu'au cas des endomorphismes.

Exemple 11 $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' - 2f' + f \end{array} \right.$ est linéaire car on a $\phi = P(u)$ où $u = \partial$ est la dérivation $f \mapsto f'$ et $P(X) = X^2 - 2X + 1$.

/!\ Lorsqu'on applique un polynôme a un endomorphisme, on fait très attention à ce que le terme constant a_0 devient, après application, $a_0 \mathrm{id}_E$.

Cas particulier du cas particulier Pour u : $\begin{cases} \rfloor^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to \rfloor^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$

On obtient que $u^2 - 2u + \mathrm{id}_{\rfloor^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est un endomorphisme

— $-2u = -2f'$

— $u^2 = f''$

et $u^2 - 2u + \mathrm{id}$ c'est $\begin{cases} \rfloor^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to \rfloor^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto \underbrace{f''}_{u^2(f)} \underbrace{-2f'}_{-2u(f)} + \underbrace{f}_{} \mathrm{id}(f) \end{cases}$

$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ donc notre endomorphisme peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} (f \mapsto f' - f)^2 &= f \mapsto (f' - f)' - (f' - f) \\ &= f \mapsto f'' - 2f' + f \end{aligned}$$

Exo 0.1 de la feuille : c'est le même polynôme $X^2 - 2X + 1$ appliqué à "shift" $u_n \mapsto u_{n+1}$

$$\begin{aligned} (u_n \mapsto u_{n+1})^2 - 2(u_n \mapsto u_{n+1}) + 1 &= (u_n \mapsto u_{n+1}) \circ (u_n \mapsto u_{n+1}) - 2(u_n \mapsto u_{n+1}) + \mathrm{id} \\ &= u_n \mapsto u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

I.5 Réciproque

Théorème 6 .

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Définition 4 .

Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.

Démonstration. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\lambda u + \mu v) &= f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(u)) + \mu f(f^{-1}(v))) & \\
&= f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v))) & \text{car } f \in \mathcal{L} \\
&= \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v) & \text{par définition}
\end{aligned}$$

□

Exemples 12 Reprenons les exemples précédents.

- La conjugaison est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Elle a en effet une application réciproque linéaire : elle même.
- La transposition de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme. Son application linéaire réciproque est la transposition de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- L'application $\left|\ \right|_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme : voir p. ??. □
- $\cdot'$ n'est pas un iso
- $\int_a^b f$ n'est pas un iso
- Tr n'est pas un iso (sauf pour $n = 1$)
- $\begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ n'est pas un iso
- Exercice 0.2 : $P \mapsto P''(0) + P(0)X^2$ n'est pas un isomorphisme puisque X n'a pas d'antécédent
- Exercice 0.1 : $u \mapsto (u_{n+2} - u_{n+1} + u_n)_n$

  Un antécédent de $(0)_n$ est une suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$

$$\begin{aligned}
S_{2,-1} &= \{\lambda(1^n)_n + n\mu(1^{n-1})_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} \\
&= \{(\lambda + \mu n)_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} \\
&= \text{suites arithmétiques}
\end{aligned}$$

  En particulier, $(0)_n$ a une infinité d'antécédents, donc ce n'est pas un isomorphisme

Sixième méthode pour montrer qu'une application est linéaire : on montre que c'est la réciproque d'une application linéaire.

Exemple 13 Si E est de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E alors $\begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \mapsto & \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n \end{cases}$ est clairement linéaire, et bijective par définition d'une base.

On en déduit donc que $\left|\ \cdot\ \right|_{\mathcal{B}}$ est linéaire. (Bien sûr, on le savait déjà.)

Notation 1

S'il existe un isomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, on dit que E et F sont isomorphes.

Remarque 1

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et isomorphes, alors ils ont la même dimension.

Analogue ensembliste : $A \simeq B \Leftrightarrow \#A = \#B$

Démonstration. Soit $f : E \to F$ un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque g, et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. Montrons que la famille $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est une base de F : comme f est injective, cette base aura le même cardinal que la base de E de départ, ce qui montrera donc que E et F ont même dimension.

Liberté Soit $\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = 0_F$ une CL nulle.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 g(u_1) + \cdots + \lambda_n g(u_n) = 0_E && \\
\Leftrightarrow\ & g(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = g(0_E) && \text{par linéarité de } g \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E && \text{par injectivité de } g \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 && \text{par liberté de } \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Caractère générateur Montrons que l'image d'une famille génératrice $\mathcal{G} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ par une AL surjective $h : E \to F$ est génératrice.
Soit $y \in F$.
Par surjectivité de h, il existe $u \in E$ tel que $y = h(x)$
Par caractère générateur de $\mathcal{G}$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

$\square$

I.6 Groupe linéaire

Définition 5 .

On dit qu'une application linéaire est un automorphisme de E lorsque c'est un isomorphisme de E dans E. En bref : « auto = endo + iso ». On notera $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemples 14 Reprenons les exemples précédents.

- $\bar{\cdot}$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- ${}^t\cdot\ :\ \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est un automorphisme si et seulement si $p = q$. En notant $n = p = q$, c'est alors un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'application $\Big|\ \Big|_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ est un automorphisme si et seulement si $E = \mathbb{K}^n$. C'est alors un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. $\square$
- Tr n'est pas un autormophisme (sauf pour $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ lol)
- $\begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto (u_0, u_1) \end{cases}$ n'est pas un auto

D'après la proposition sur les isomorphismes, un automorphisme est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ pour laquelle il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$. Autrement dit, les automorphismes de E sont précisément les éléments inversibles de l'anneau $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ\big)$. On a donc $GL(E) = \mathcal{L}(E)^\times$.

Théorème-définition 7 .

En particulier $\big(GL(E), \circ\big)$ forme un groupe. On l'appelle le groupe linéaire de E.

Et oui, bien sûr, il y a un lien avec $GL_n(\mathbb{K})$... on en parlera plus tard.

I.7 Formes linéaires

La définition suivante servira pour la suite. On peut déjà l'apprendre pour les khôlles de la semaine prochaine.

Définition 6 .

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans le corps de base $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire sur E. On notera E^* plutôt que $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemples 15 Reprenons les exemples précédents.

- Tr est une forme linéaire
- $\int_a^b \cdot$ est une forme linéaire

— $\bar{\cdot}$ n'est pas une forme linéaire car le corps de base est $\mathbb{R}$, pas $\mathbb{C}$ (sinon c'est même pas linéaire)

— id_E est une forme linéaire ssi $E = \mathbb{K}$ (*i. e.* quasiment jamais)

— det n'est pas linéaire

— eval_0 est une forme linéaire

— $\sum_{k=0}^{\infty} \cdot$: séries convergentes $\to \mathbb{R}$ est une forme linéaire

— $< \cdot, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire

— $< \cdot, \cdot\cdot >$ est une forme ~~linéaire~~ bilinéaire

II Propriété fondamentale

II.1 Exemple des droites.

Lemme 1 .

Soit D une droite (i. e. un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1).
Une application $f : D \to D$ est linéaire si et seulement si c'est une homothétie.

Démonstration. $\dim D = 1$ ie $f \in \mathcal{L}(D)$, montrons que f est une homotéthie
ie $f = \lambda \mathrm{id}_D$ ie $\forall v \in D, f(v) = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$
Posons λ le scalaire tel que $f(u) = \lambda u$ (car $f(u) \in D$)
Soit $v \in D$, ainsi $v = au$ pour un certain $a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(v) &= f(au) \\ &= af(u) && \text{linéarité} \\ &= a\lambda u \\ &= \lambda a u \\ &= \lambda v \end{aligned}$$

$\square$

Application 1 Considérons $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{R}$-ev. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont

II.2 Exemple de $\mathbb{K}^n$

Proposition 4 .

Soit $f : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$; f est linéaire si et seulement s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que $f = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^q & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & A \times x. \end{array} \right.$
Autrement dit, f est linéaire si et seulement s'il existe des scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ pour lesquels on peut écrire

$$f = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^q & \to & \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,q}x_q \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,q}x_q \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f de la forme $\begin{cases} \mathbb{K}^q & \to \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto A \times x \end{cases}$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathbb{K}^q$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x+\beta y) &= A(\alpha x+\beta y) & \\
&= A\alpha x + A\beta y & \text{par distributivité de } \times \text{ sur } + \\
&= \alpha A x + \beta A y & \text{par compatibilité de } \times \text{ et } \cdot \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y) & \text{d'où la linéarité}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f linéaire.

Soit $x \in \mathbb{K}^q$, ie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_qe_q$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1e_1 + \ldots + x_qe_q) & \text{par linéarité} \\
&= x_1 f(e_1) + \ldots + x_q f(e_q)
\end{aligned}
$$

$f(e_1) \in \mathbb{K}^p$ donc $f(e_1)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$ $f(e_2) \in \mathbb{K}^p$ donc $f(e_2)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix}$ $\vdots$ $f(e_q) \in \mathbb{K}^p$ donc $f(e_q)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}$

et donc $f(x) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \cdots + x_q \begin{pmatrix} a_{1q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}$

ie

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1q} \\ \vdots \\ a_{p1} \cdots + a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \\
&= Ax & \text{en notant...} \\
A &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1q} \\ \vdots \\ a_{p1} \cdots a_{pq} \end{pmatrix} & \text{qui ne dépend que de } e_1, \ldots, e_q \text{ et } f \text{ (mais pas de } x \text{)}
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2

Du coup, « dans $\mathbb{R}^n$ », toute application linéaire se représente canoniquement par une matrice [2], mais on a vu qu'un espace de dimension finie quelconque pouvait être ramené à $\mathbb{R}^n$ en le munissant d'une base : il sera donc possible en dimension finie, et pas seulement dans $\mathbb{R}^n$, de représenter les applications linéaires par des matrices. On verra plus tard, hein. Quant au cas de la dimension quelconque, on ne peut plus parler de matrice, mais on peut faire pareil quand même, c'est l'objet du paragraphe suivant.

2. Et du coup on connaissait déjà. Boring.

II.3 Cas général

Théorème 8 : Propriété fondamentale des applications linéaires.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement et uniquement déterminée par ses valeurs sur une base de E.

Autrement dit : soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors, pour toute famille $(y_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I,\ f(\varepsilon_i) = y_i$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\epsilon_i)_{i \in I}$ une base de E et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de F

Analyse considérons une AL f convenable ie telle que $\forall i \in I, f(\epsilon_i) = y_i$
Soit $x \in E$.
Par définition d'une base, x peut s'écrire d'une façon unique $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \epsilon_{i_k}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \epsilon_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\epsilon_{i_k}) && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} && \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Unique candidat :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \epsilon_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k}$$

Synthèse Testons nos candidats

— $f(\epsilon_i) = f\left(\sum_{k=i}^{i} 1\epsilon_i\right) = \sum_{k=i}^{i} 1 y_k = y_i$

— Montrons que f est linéaire Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $x, y \in E$

Par définition d'une base on peut les écrire

$$\begin{cases} x &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \epsilon_{i_k} \\ y &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k \epsilon_{i_k} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta y) &= f\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \epsilon_{i_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} \mu_k \epsilon_{i_k}\right) \\
&= f\left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k)\, \epsilon_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) y_{i_k} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_{i_k} \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}$$

□

Exemples 16 Prenons le cas $E = F = \mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

1. Il existe un unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X^n) = X^{n+1}$.
   Cet endomorphisme est $P \mapsto XP$.
2. Il existe un unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X^n) = nX^{n-1}$.
   Cet endomorphisme est $P \mapsto P'$.
3. Il existe un unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X^n) = X^{n^2} + X^{2^n} + n$.
   Cet endomorphisme n'a pas d'expression simple. Mais on peut calculer l'image d'un polynôme, par exemple :

$$f(X^2 - X + 1) = f(X^2) - f(X) + f(1) = (2X^2 + 2) - (X^2 + X + 1) + (1 + X) = X^2 + 2$$

Application 2 Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

• Le sens direct est donné par la remarque 1 !

• Sens réciproque : On suppose E, F de même dimension finie n.
Ainsi E a une base de la forme $(u_1, \dots, u_n)$ et F de la forme $(v_1, \dots, v_n)$

— D'après thm 8, il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], f(u_i) = v_i$

— De même, d'après thm 8, il existe une AL $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], g(v_i) = u_i$

— En particulier $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], g \circ f(u_i) = g(v_i) = u_i$. **Par unicité** dans le thm 8, $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$

II.4 Définition par restrictions

Théorème 9 : Propriété fondamentale généralisée.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des sevs de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p = E$.
Soient $\varphi_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $\varphi_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, ..., $\varphi_p \in \mathcal{L}(E_p, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $\varphi_{|E_i} = \varphi_i$.

En quoi est-ce une généralisation de la propriété fondamentale ?

Analyse Considérons φ convenable
Soit $x \in E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$
Par def., x peut s'écrire de façon unique

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \ldots + \underbrace{x_2}_{\in E_2} \qquad \text{par linéarité}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_3) \\ &= \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_p(x_p)\end{aligned}$$

Unique candidat $\varphi : \begin{cases} E & \to F \\ x = x_1 + \ldots + x_p & \mapsto \varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_p(x_p) \end{cases}$

Synthèse par construction, on a bien $\forall i \in [\![1, p]\!], \varphi_{|E_i} = \varphi_i$

Montrons la linéarité. Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

x peut s'écrire $x = \underbrace{x_1}_{E_1} + \ldots + \underbrace{x_p}_{E_p}$

y peut s'écrire $y = \underbrace{y_1}_{E_1} + \ldots + \underbrace{y_p}_{E_p}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + \mu y) &= \varphi(\underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1 \text{ car } E_1 \text{ sev}} + \ldots + \underbrace{\lambda x_p + \mu y_p}_{\in E_p \text{ car } E_p \text{ sev}}) \\
&= \varphi_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + \varphi_p(\lambda x_p + \mu y_p) && \text{par construction} \\
&= \lambda(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_p(x_p)) + \mu(\varphi_1(y_1) + ... + \varphi_p(y_p)) && \text{par linéarité des } \varphi_i \\
&= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les E_i sont tous des droites, il existe des vecteurs non nuls ε_i tels que $E_i = \text{Vect}\,(\varepsilon_i)$. De plus, d'après le corollaire **??** du chapitre **??**, la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_p)$ est une base de E. Se donner les applications φ_i c'est se donner, en particulier, les images $\varphi_i(\varepsilon_i)$. La propriété fondamentale assure alors qu'il existe une unique application linéaire φ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \varphi(\varepsilon_i) = \varphi_i(\varepsilon_i)$. Il n'est ensuite pas difficile de voir qu'on a $\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \varphi_{|E_i} = \varphi_i$.

Démonstration.

□

Exemple 17 Soient a et b deux réels. Les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(b) \end{array}\right.$ sont linéaires, il existe donc une unique application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute fonction paire associe sa valeur en a, mais qui à toute fonction impaire associe sa valeur en b. **Pourquoi ? Et quelle est cette application ?**

$$\underbrace{\mathcal{P}}_{E_1} \oplus \underbrace{\mathcal{I}}_{E_2} = \underbrace{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}_{E}$$

$\varphi_1 : \begin{cases} \mathcal{P} & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(a) \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathcal{I} & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(b) \end{cases}$ sont <u>linéaires</u> par linéarité de l'évaluation.

D'après le théorème, $\exists! \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} \varphi_{|\mathcal{P}} & = \varphi_1 \\ \varphi_{|\mathcal{I}} & = \varphi_2 \end{cases}$

Rappe Toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ peut s'écrire de façon unique

$$f = \underbrace{\frac{f + f \circ (-\mathrm{id})}{2}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{f - f \circ (-\mathrm{id})}{2}}_{\in \mathcal{I}}$$

D'où $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \varphi(f) \\ & = \varphi_1(f_p) + \varphi_2(f_i) \\ & = \frac{f(a)+f(-a)}{2} + \frac{f(b)-f(-b)}{2} \\ & = \frac{1}{2}(f(a) + f(b) + f(-a) - f(-b)) \end{cases}$

III Noyau, image et rang

Dans cette section on considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

III.1 Image et noyau

Définition 7 : Rappel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\} \subset E$.
- On appelle image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\} \subset F$.

Théorème 10 : Rappel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f surjective $\Leftrightarrow F \subset \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Exemple 18 Calculons image et noyau de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Notons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^3 & \to \mathbb{K}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect de ses colonnes}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^3}\} \\
&= \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, x_1+x_2+x_3 = 0\} \\
&= \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, x_1 = -x_2-x_3\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Solutions des équations formées par ses lignes}
\end{aligned}$$

Remarque 3 On peut parler d'image ou noyau d'une matrice ; cela signifie image ou noyau de l'application linéaire canoniquement associée. (Voir juste au-dessus)

Exemple 19 Calculons image et noyau de l'application $\cdot' : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P'\end{array}\right.$.

Donc

—

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= f^{\to}(\mathbb{K}[X]) \\
&= \{(f(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n), n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}\} \\
&= \{a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^n, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(0, 1, 2X, 3X^2, \ldots, nX^{n-1}, \ldots\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, \ldots\right) \\
&= \mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{P \in \mathbb{K}[X], f(P) = 0\}\\ &= \{P \in \mathbb{K}[X], P' = 0\}\\ &= \mathrm{Vect}\,(1)\\ &= \mathbb{K}_0[X]\\ &= \mathbb{K}\end{aligned}$$

Théorème 11 .
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel F.

DÉMONSTRATION. 1. $\mathrm{Ker}\, f$ sev de E.

— $0_E \in \mathrm{Ker}\, f$ car $f(O_E) = 0_F$ donc $\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$

— Soient $u, v \in \mathrm{Ker}\, E \mathrm{ie} f^{\rightarrow}\{u, v\} = \{0_E\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ Montrons que $\lambda u + \mu v \in \mathrm{Ker}\, f$

$$\begin{aligned}f(\lambda u + \mu v) &= \lambda f(u) + \mu f(v) && \text{par linéarité de } f\\ &= \lambda 0_F + \mu 0_F && \text{par hypothèse}\\ &= 0_F\end{aligned}$$

Donc ok !

2. $\mathrm{Im}\, f$ sev de E

— $0_E \in \mathrm{Im}\, f$ car $f(O_E) = 0_F$ donc $\mathrm{Im}\, f \neq \emptyset$

— Soient $u, v \in \mathrm{Im}\, E$ ie il existe $x, y \in E$ tel que $u, v = f(x), f(y)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ Montrons que $\lambda u + \mu v \in \mathrm{Im}\, f$

$$\begin{aligned}f(\lambda x + \mu y) &= \lambda f(x) + \mu f(y) && \text{par hypothèse}\\ &= f(\lambda x + \mu y) && \text{par linéarité}\end{aligned}$$

Donc ok !

□

Application 3 On retrouve que :

- l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel $\mathbb{K}^p$;
- un sous-ensemble de $\mathbb{K}^q$ défini par un paramétrage linéaire est un sous-espace vectoriel $\mathbb{K}^q$.

En effet : $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}, \begin{cases}a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p & = 0\\ & \vdots\\ a_{q1}x_1 + \ldots + a_{qp}x_p & = 0\end{cases}\right\} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a_{11}\ldots a_{1p}\\ \vdots\\ a_{q1}\ldots a_{qp}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}P &= \left\{\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + & \ldots + & a_{1p}x_p\\ \vdots & & \vdots\\ a_{q1}x_1 + & \ldots + & a_{qp}x_p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p\right\}\\ &= \mathrm{Im}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a_{11}\ldots a_{1p}\\ \vdots\\ a_{q1}\ldots a_{qp}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

III.2 Rang

Notation 2 Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $f(\mathcal{F})$ la famille obtenue en appliquant f aux vecteurs de $\mathcal{F}$. Ainsi, pour $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$, on a $f(\mathcal{F}) = \big(f(u_i)\big)_{i\in I}$.

Définition 8 .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la quantité $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Exemple 20 Soit $n \geqslant 3$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP''(X) + X^2P(0). \end{array} \right.$

• Vérifions que φ est linéaire :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \qquad \text{par linéarité de } \mathrm{eval}_0, \cdot'' \text{ et } \cdot$$

• Calculons $\mathrm{rg}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\varphi &= \dim \mathrm{Im}\,\varphi \\
&= \dim\{\varphi^{\rightarrow}\{a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\}, \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}\} \\
&= \dim\{a_0\varphi(1) + a_1\varphi(X) + \ldots + a_n\varphi(X^n), \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}\} \\
&= \dim \mathrm{Vect}\,\big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3), \ldots, \varphi(X^n)\big) \\
&= \dim \mathrm{Vect}\,\big(X^2, 0, 2X, 6X^2, \ldots, n(n-1)X^{n-1}\big) \\
&= \dim \mathrm{Vect}\,\big(X^2, X, X^2, X^3, \ldots, X^{n-1}\big) \\
&= \dim(X\mathbb{K}_{n-2}[X]) \\
&= n-1
\end{aligned}$$

Théorème 12 .

Le rang de f est un rang ! Plus précisément, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(f(\mathcal{B})\big)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_i)_{i\in I}$ base de E

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim \mathrm{Im}\, f \\
&= \dim\{f(x), x \in E\} \\
&= \dim\{f(\lambda_1\epsilon_{i_1} + \lambda_2\epsilon_{i_2} + \ldots + \lambda_n\epsilon_{i_n}), n \in \mathbb{N}, i_k \in I, \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\
&= \dim\{\lambda_1 f(\epsilon_{i_1}) + \lambda_2 f(\epsilon_{i_2}) + \ldots + \lambda_n f(\epsilon_{i_n}), n \in \mathbb{N}, i_k \in I, \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\
&= \dim \mathrm{Vect}\,((f(\epsilon_i)_{i\in I}) \\
&= \mathrm{rg}(f(\mathcal{B}))
\end{aligned}$$

□

Théorème 13 : Propriétés "immédiates" du rang.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$, et, de plus :
3. si f est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$ et si g est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$. i. e. composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

Démonstration. Exercice. Certains points sont vraiment évidents, d'autres plus pénibles.

□

III.3 Équations d'un hyperplan

Théorème 14 .

Les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.

Démonstration. $\boxed{\subset}$ Soit H un hyperplan Par définition H a pour supplémentaire une droite $D = \mathrm{Vect}\,(u)$ où $u \neq 0_E$

$$E = H \oplus D$$

D'après la propriété fondamentale, il existe une unique AL $\varphi_2 \in \mathcal{L}(D, \mathbb{K})$ tel que

$$\varphi_2(u) = 1$$

Cette AL est $\varphi_2 : \begin{cases} D = \mathrm{Vect}\,(u) & \to \mathbb{K} \\ x = \lambda u & \mapsto \lambda \end{cases}$

D'après la propriété fondamentale généralisée, il existe une unique AL $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $\begin{cases} \varphi_{|H} & = 0_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})} \\ \varphi_{|D} & = \varphi_2 \end{cases}$

Cette AL est $\begin{cases} E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(u) & \to \mathbb{K} \\ x = h + \lambda u & \mapsto \lambda \end{cases}$

On a bien $\varphi \in E^* \setminus \{0_E^*\}$ $(\varphi(u) = 1\ )$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,\varphi &= \{x \in E, \varphi(x) = 0\} \\ &= \{h + \lambda u, \begin{cases} h & \in H \\ \lambda & \in \mathbb{K}\ \} \\ \varphi(H + \lambda u) & = 0 \end{cases} \\ &= \{h + \lambda u, \begin{cases} h & \in H \\ \lambda & = 0 \end{cases}\} \\ &= \{h, h \in H\} \\ &= H \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$

Soit $\phi \in E^* \setminus \{0_E^*\}$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan

ϕ n'est pas nulle donc il existe un vecteur $u \in E$ tel que $\phi(u) \neq 0$

Montrons qu'on a

$$H \oplus \mathrm{Vect}\,(u) = E$$

par analyse synthèse

Soit $x \in E$

Analyse Considérons une décomposition convenable, c'est-à-dire $x = h + \lambda u$ avec $\begin{cases} h & \in H \\ \lambda & \in \mathbb{K} \end{cases}$
On applique ϕ :

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(h)}_{=0} + \lambda \underbrace{\phi(u)}_{\neq 0}$$

Donc

$$\lambda = \frac{\phi(x)}{\phi(u)}$$
$$h = x - \frac{\phi(x)}{\phi(u)} u$$

Synthèse Testons nos candidats
On veut $\begin{cases} \lambda u \in \operatorname{Vect}(u) & : \text{ok} \\ x = h + \lambda u & : \text{ok par construction} \\ h \in \operatorname{Ker} \phi & \text{faisons-le} \end{cases}$
Montrons que $h \in \operatorname{Ker} \phi$

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \phi(x - \frac{\phi(x)}{\phi(u)} u) \\ &= \phi(x) - \frac{\phi(x)}{\phi(u)} \phi(u) && \text{par linéarité de } h \\ &= 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

□

Application 4

1. On retrouve que l'ensemble des matrices de trace nulle forme un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car
matrices de trace nulle = Ker $\underbrace{\operatorname{Tr}}_{\text{forme linéaire non nulle car } \operatorname{Tr} I_n = n \neq 0 \text{ (avec } n \geq 1 \text{)}}$
2. On retrouve que $\left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 0\right\}$ est un hyperplan car
$\left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 0\right\} = \operatorname{Ker} \int_0^1$ avec $\int_0^1$ qui est une forme linéaire non nulle car $\int_0^1 \mathrm{id} = \frac{1}{2} \neq 0$

Application 5

1. Pour $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve que les hyperplans
Une forme linéaire sur KE est une AL $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
Donc de la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
Le noyau d'une FL est de la forme
$$\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}$$

$$f \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. En particulier, pour $E = \mathbb{R}^3$, on retrouve que

   Un plan de $\mathbb{R}^3$ a une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Définition 9 .

Soit H un hyperplan de E. On appelle équation de H une expression de la forme $\phi(x) = 0$ où ϕ est une forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(\phi) = H$. D'après le théorème 14, tout hyperplan a une équation.

III.4 Théorème d'isomorphisme

Théorème 15 : Théorème d'isomorphisme.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\mathrm{Im}(f)}$ est bien définie et c'est un isomorphisme.
On dit que f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\mathrm{Ker}\, f$ sev E $\mathrm{Ker}\, f \oplus S = E$

$$f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f} : \begin{cases} S & \to \mathrm{Im}\, f \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

— $f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f}$ est bien défini car $\begin{cases} S & \subset E \\ \mathrm{Im}\, f & \subset \\ f^{\rightarrow}(A) & \subset B \end{cases}$ par définition et car

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow}(S) &= \{f(x), x \in S\} \\ &\subset \{f(x), x \in E\} && \text{car } S \subset E = \mathrm{Im}\, f \end{aligned}$$

— $f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f}$ est linéaire comme co,restriction d'AL.

— $f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f}$ est surjective :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \{f(x), x \in E\} \\ &= \{f(k+s), (k, s) \in \mathrm{Ker}\, f \times S\} && \text{car } \ker f \oplus S = E \\ &= \{\cancel{f(k)} + f(s), (k, s) \in \mathrm{Ker}\, f \times S\} \\ &= \{f(s), s \in S\} \\ &= f^{\rightarrow}(S) \end{aligned}$$

On a $f^{\rightarrow}(S) = \mathrm{Im}\, f$ donc $f_{|S}^{|\,\mathrm{S}}$ est bien surjective

— $f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f}$ est injective

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\left(f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}\, f}\right) &= \mathrm{Ker}\, f_{|S} \\ &= \mathrm{Ker}\, f \cap S \\ &= \{0_E\} && \text{car } \mathrm{Ker}\, f \oplus S = E \end{aligned}$$

$\square$

Le théorème d'isomorphisme généralise le sens réciproque du théorème de caractérisation des hyperplans. Pourquoi ?

Exemple 21

$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto X^2 P' \end{cases}$$

$$f_{|S}^{|\operatorname{Im} f} \begin{cases} X\mathbb{K}[X] & \to X^2\mathbb{K}[X] \\ P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n & \mapsto X^2 P'(X) = a_1 X^2 + \ldots + n a_n X^{n+1} \end{cases} \text{ est un isomorphisme}$$

D'ailleurs

$$\left(f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}\right)^{-1} : \begin{cases} X^2\mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) = \alpha_2 X^2 + \ldots . + \alpha_n X^n & \mapsto \alpha_2 X + \frac{\alpha_3}{2} X^2 + \ldots + \alpha_{\frac{n}{n_1}} X^{n-1} = \int_0^X \frac{P(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t \end{cases}$$

En particulier $X\mathbb{K}[X] \simeq X^2\mathbb{K}[X]$

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$$
$$\operatorname{Im} f = X^2\mathbb{K}[X]$$

Un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ est $S = X\mathbb{K}[X]$

IV Applications linéaires en dimension finie

IV.1 Théorème du rang

Théorème 16 : formule du rang.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. **On suppose que E est de dimension finie.** Alors $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \dim(E)$ i. e. $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f))$.

Démonstration. C'est un corollaire assez immédiat du théorème d'isomorphisme. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ qui existe car $\dim E \in \mathbb{N}$
On a $S \simeq \operatorname{Im} f$ car $f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim S$ ie $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$ car $E = \operatorname{Ker} f \oplus S$ $\square$

Application 6 Calcul rapide de noyau avec le théorème du rang : déterminons Ker $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$f_M : \begin{cases} \mathbb{K}^3 & \to \mathbb{K}^4 \\ x & \mapsto M \times x \end{cases}$$

D'après le théorème du rang,

$$
\begin{aligned}
\dim \operatorname{Ker} M &= 3 - \operatorname{rg} M \\
&= 3 - \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}\right) \\
&= 3 - \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= 3 - 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Or $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ forme une famille libre de $\operatorname{Ker} M$, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} M$

IV.2 Applications immédiates du théorème du rang

Application 7 On retrouve que pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, un hyperplan est exactement un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

$$
\begin{aligned}
&H \text{ hyperplan} \\
\Leftrightarrow\ &H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non-nulle}
\end{aligned}
$$

Il suffit de montrer que les sevs dimension $n-1$ sont exactement les noyaux de formes linéaires non-nulles

— Si $H = \operatorname{Ker} \phi$ avec $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_E\}$
  Alors

$$
\begin{aligned}
\dim H &= \dim \operatorname{Ker} \phi \\
&= n - \dim \operatorname{Im} \phi \\
&= n - 1 && \text{car } \phi \neq 0_{E^*}
\end{aligned}
$$

— Si $\dim H = n-1$
  H a un supplémentaire S et $\dim S = n - (n-1) = 1$ donc H hyperplan

Application 8 On retrouve la formule de Grassmann.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Considérons $\phi : \begin{cases} F \times G & \to F + G \\ (f,g) & \mapsto f + g \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} F \cap G & \to F \times G \\ x & \mapsto (x, -x) \end{cases}$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} \phi &= F + G \implies \phi \in \\
\operatorname{Ker} \phi &= \{(f,g) \in F \times G, f + g = 0\} \\
&= \{(f,g) \in F \times G, g = -f\} \\
&= \{(x,-x), x \in F \cap G\} \\
&= \operatorname{Im} \psi \\
\operatorname{Ker} \psi &= \{0_{F \times G}\}
\end{aligned}
$$

Donc $F \cap G \simeq \operatorname{Im} \psi = \operatorname{Ker} \phi$

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim \operatorname{Ker} \phi \\ &= \dim(F \times G) - \dim \operatorname{Im} \phi && \text{d'après théorème du rang} \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F + G) \end{aligned}$$

Application 9 On peut enfin montrer le résultat vu en TACMAS (essentiellement équivalent au théorème du rang) : le rang par lignes d'une matrice est le même que son rang par colonnes.

- Effectuer des OEs[3] sur les colonnes de A :
  - ne modifie pas $\operatorname{Im} A$
  - mais modifie $\operatorname{Ker} A$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & ,\dots, & C_q \\ | & & | \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & ,\dots, & C_q \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f)(\mathcal{B}) \text{ où } \mathcal{B} \text{ une base})$$

- Effectuer des OEs sur les lignes de A :
  - modifie $\operatorname{Im} A$
  - ne modifie pas $\operatorname{Ker} A$

Notons r_c le rang par colonnes de A et r_l le rang par lignes de A
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} A &= \mathrm{rg}(f_A) \\ &= \mathrm{rg}(f_A(e_1), \dots, f_A(e_q)) \\ &= rg \begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & ,\dots, & c_q \\ | & & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

r_c est le nombre de colonnes non nulles la fin de l'alogirthme de Fauss ru les colonnes

$$\begin{aligned} & A \sim_C E_c && \text{avec } E_c \text{ échelonnés par colonnes} \\ \Leftrightarrow\ & E_c = \big(voirlaphotolol\big) \\ \Longrightarrow\ & r_c = \mathrm{rg} E_c \\ & \quad = \mathrm{rg} A \end{aligned}$$

3. opérations élémentaires

r_l est le nombre de lignes non-nulles à la fin de Gauss sur les lignes

$$\begin{aligned} A &\sim_L E_l && \text{échelonnée par lignes} \\ \Leftrightarrow E_l &= \big(voirphotolol\big) \\ \dim \operatorname{Ker} A &= \dim \operatorname{Ker} E_l \\ &= n - r_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_L &= n - \dim \operatorname{Ker} A \\ &= \operatorname{rg} A \\ &= r_C \end{aligned}$$

IV.3 Théorème du rang et *jectivité

Théorème 17 : Caractérisation par le rang.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors on a :

i/ f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$;

ii/ f est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$;

iii/ f est bijective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

On retrouve en particulier que la dimension est invariante par isomorphisme.

Démonstration. i/

$$f \in \quad \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$$

Or on sait que $\operatorname{Im} f \subset F$ donc

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} f = F \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\operatorname{rg} f} = \dim F && \text{propriété fondamentale sur les sevs ddf} \end{aligned}$$

ii/

$$\begin{aligned} f \in \quad &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 && \Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} f \quad \text{d'après le théorème du rang} \end{aligned}$$

iii/ $i/ \wedge ii/$

$\square$

Théorème 18 : Caractérisation des isomorphismes.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalentes :

i/ f est injective ;

ii/ f est surjective ;

iii/ f est un isomorphisme.

Démonstration.

$$\begin{aligned} f \in \quad & \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim E \\ & \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = n \\ & \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim F \\ & \Leftrightarrow f \in \end{aligned}$$

□

Remarque 4

On a un analogue ensembliste : Soit A, B deux ensembles tels que $\#A = \#B := n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned} f : A \to B \in \quad & \\ & \Leftrightarrow f \in \\ & \Leftrightarrow f \in \end{aligned}$$

Application 10 On peut reprendre CCP $n°$ 87 avec la méthode du corrigé.

En corollaire immédiat :

Théorème 19 : Caractérisation des automorphismes.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

i/ f est inversible à gauche ;

ii/ f est inversible à droite ;

iii/ f est un automorphisme.

IV.4 Deux applications de la théorie au calcul matriciel

Application 11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nilpotente. Alors l'indice de nilpotence de A est inférieur ou égal à n.

Démonstration. On peut le faire sans application linéaire avec la méthode du DS $n°$ 11 version normale, ou avec application linéaire avec la méthode des noyaux itérés. □

Application 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalentes :

i/ A est inversible à gauche ;

ii/ A est inversible à droite ;

iii/ A est inversible.

Démonstration. i/ $\Longrightarrow$ ii/ Supposons A inversible à gauche ie il existe $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$

$$\text{Pour } \begin{cases} f_A & : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto Ax \end{cases} \\ f_B & : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto Bx \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Or } f_B \circ f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto \underbrace{B \times A}_{I_n} \times x = \mathrm{id} \end{cases}$$

donc f_A a un inverse à gauche

donc f_A est injective

donc f_A est un isomorphisme

donc $f_B = (f_A)^{-1}$

donc $\underbrace{f_A \circ f_B}_{f_{A\times B}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$

donc $A \times B = I_n$

ii/ $\implies$ iii/ ok

i/ $\implies$ iii/ ok

□

V Endomorphismes remarquables

Dans toute la section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

V.1 Endomorphismes nilpotents

Définition 10 .

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent lorsque c'est un élément nilpotent de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
L'unique entier p tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ s'appelle l'indice de nilpotence de f.

Exemple 22

— Considérons $\begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ est nilpotente d'indice de nilpotence

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— $f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$ est nilpotent d'indice $n+1$ mais $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$ n'est pas nilpotent

— L'application $\begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \operatorname{Im} z \end{cases}$ est nilpotente d'indice 2

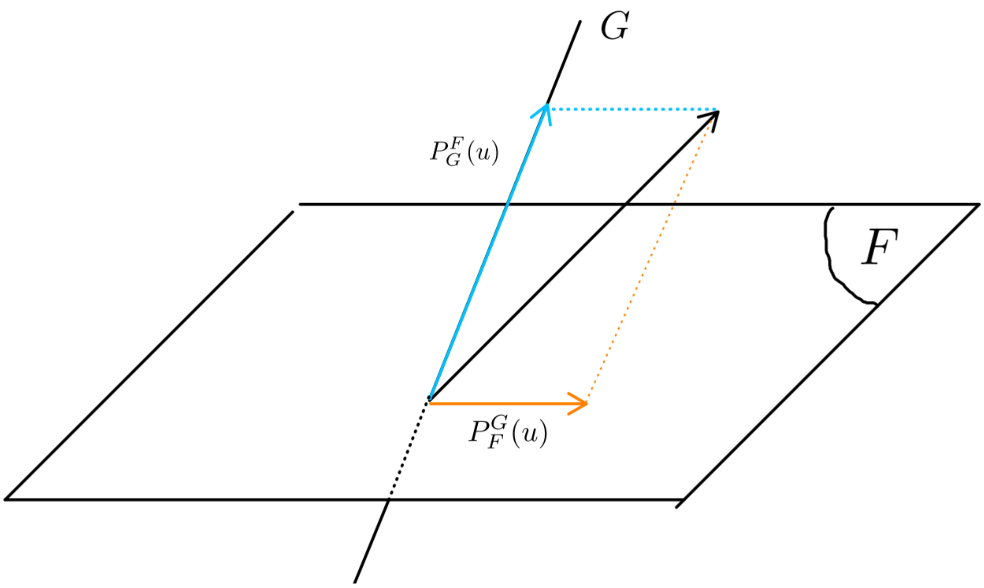
Proposition 5 .

Si $\dim(E) < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors l'indice de nilpotence de f est plus petit que $\dim(E)$.

Démonstration. La preuve est la même dans le cas général que dans le cas des f_A avec A une matrice nilpotente. □

V.2 Projections

On veut **généraliser** la notion de projection orthogonale. Faisons un dessin dans $\mathbb{R}^3$.



$$P_F^G \begin{cases} E = F \oplus G & \to E \\ x = x_F + x_G & \mapsto x_F \end{cases}$$

$$P_G^F \begin{cases} E = F \oplus G & \to E \\ x = x_F + x_G & \mapsto x_G \end{cases}$$

Proposition-Définition 11 .

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

Il existe un unique endomorphisme $p = p_F^G$ de E tel que $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0_{\mathcal{L}(G)}$.

On l'appelle **projection (vectorielle) sur F parallèlement à G**.

Dit plus simplement : $p_F^G : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{array} \right.$.

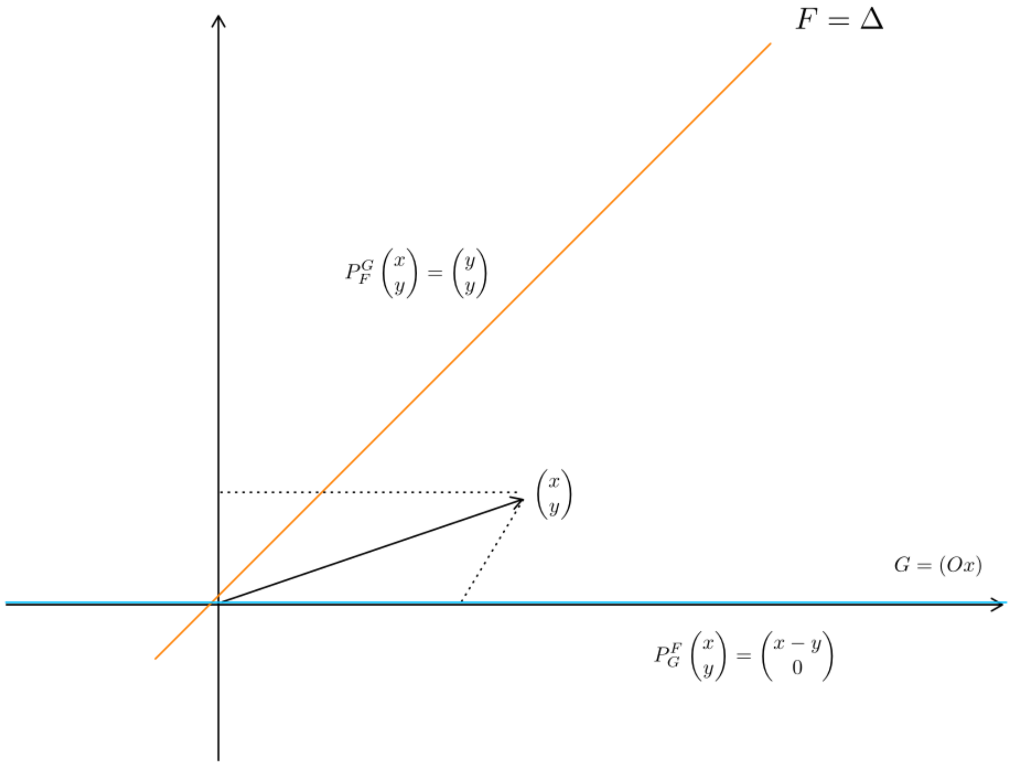
Remarque : pour plus de clarté, j'ai écrit id_F l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ qui plus rigoureusement est l'injection canonique de F dans E.

Remarque terminologique : on peut aussi dire projecteur au lieu de projection.

Démonstration. C'est un cas particulier de la propriété fondamentale généralisée $\square$

Exemple 23 Considérons $E = \mathbb{K}^2$. On sait qu'on a $\Delta \oplus (Ox) = \mathbb{K}^2$, où $\Delta = \text{Vect}\left(\binom{1}{1}\right)$ et $(Ox) = \text{Vect}\left(\binom{1}{0}\right)$.

Cherchons l'expression analytique de la projection sur Δ parallèlement à (Ox).



Décomposons $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la somme directe $\Delta \oplus (Ox) = \mathbb{K}^2$ On cherche $\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} \in \Delta$ et $\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix} \in (Ox)$ tels que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= t+\mu \\ y &= t\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= x-y \\ t &= y\end{cases}\end{aligned}$$

Exemple 24 Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
L'application « partie paire » $f \mapsto P(f) = x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est la projection sur l'espace des fonctions paires $\mathcal{P}$ parallèlement à l'espace des fonctions impaires $\mathcal{I}$.

$f \in \mathbb{R}$
R s'écrit $f = \underbrace{f_p}_{\in\mathcal{P}} + \underbrace{f_i}_{\in\mathcal{I}}$

où

$$\begin{aligned} f_p &= x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_i &= x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Remarque 5

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $p_G^F = \mathrm{id}_E - p_F^G$;

ii/ $p_G^F \circ p_F^G = p_F^G \circ p_G^F = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

DÉMONSTRATION. Pour $x \in E$ notons $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$

— $P_G^F(x) + P_G^F(x_F + x_G) = x_G = x_F + x_G - x_F = x - x_F = \mathrm{id}_E(x) - P_F^G(x)$

—

$$\begin{aligned} P_G^F \circ P_F^G(x) &= P_G^F(P_F^G(x_F + x_G)) \\ &= P_G^F(\underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

et de même dans l'autre sens.

□

Proposition 6 : Propriétés immédiates des projections.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $\mathrm{Ker}(p_F^G) = G$;

ii/ $\mathrm{Im}(p_F^G) = F$;

iii/ $p_F^G \circ p_F^G = p_F^G$.

DÉMONSTRATION. i/

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, p_F^G &= \{x_F + x_G \in E, p_F^G(x_F + x_G) = 0_F\} \\ &= \{x_F + x_G \in E, x_F = 0_F\} \\ &= G \end{aligned}$$

ii/

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, p_F^G &= \{x_F + x_G \in E, p_F^G(x_F + x_G) = 0_G\} \\ &= \{p_F^G(x_F + x_G), x_F + x_G \in E\} \\ &= \{x_F, x_F \in F\} \\ &= F \end{aligned}$$

iii/

$$\begin{aligned}
p_F^G \circ p_F^G(x) &= p_F^G(p_F^G(x_F + x_G)) \\
&= p_F^G(x_F) \\
&= p_F^G(x_F + 0_G) \\
&= x_F \\
&= p_F^G(x_F + x_G)
\end{aligned}$$

□

En particulier, il résulte de ces trois propriétés que, si p est une projection, alors c'est la projection sur $(Im(p)) = (Ker(\mathrm{id}_E - p))$ parallèlement à $(Ker(p)) = (Im(\mathrm{id}_E - p))$, et c'est aussi un endomorphisme idempotent.
Spectaculairement, la réciproque est vraie :

Théorème 20 : :mind_blown :.

Si p est un endomorphisme idempotent, alors p est une projection.

C'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration. On suppose $\begin{cases} p & \in \mathcal{L}(E) \\ p \circ p & = p \end{cases}$.
Montrons que $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} g = E$
Soit $x \in E$

Analyse Considérons une décomposition convenable $x = x_I + x_K$ avec $\begin{cases} x_I & \in \operatorname{Im} p \\ x_K & \in \operatorname{Ker} p \end{cases}$

Ainsi, $\begin{cases} \overset{\text{def}}{\exists}\ a \in E, x_I & = p(a) \\ p(x_K) & = 0_E \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& x = x_I + x_K = p(a) + x_K \\
\Longrightarrow\ & p(x) = p(x_I) + p(x_K) = p(p(a)) + 0_E && \text{en composant par } p \\
\Longrightarrow\ & p(x) = (p \circ p)(a) = p(a) = x_I \\
\Longrightarrow\ & \begin{cases} x_I & = p(x) \\ x_K & = x - p(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

Synthèse

— $x_I + x_K = p(x) + (x - p(x)) = x$

— $x_I = p(x) \in \operatorname{Im} p$

— $x_K \in \operatorname{Ker} p$ car :

$$\begin{aligned}
p(x_K) &= p(x - p(x)) \\
&= p(x) - (p \circ p)(x) \\
&= p(x) - p(x) \\
&= 0_E
\end{aligned}$$

Notons $\begin{cases} I &= \operatorname{Im} p \\ K &= \operatorname{Ker} p \end{cases}$ et montrons $p = p_I^K$

Soit $x \in E$. On a vu que sa décomposition dans $I \oplus K$ est $x = \underbrace{p(x)}_{\in I} + \underbrace{x - p(x)}_{\in K}$

Donc $p_I^K(x) = p(x)$, d'où $p_I^K = p$

$\square$

Application 13 Voici un exercice classique : soient E, F deux K-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Alors on a $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g) = F$.

En dimension finie, <u>et si</u> <u>$\dim E = \dim F$</u> $g \circ f = \mathrm{id}_E \Leftrightarrow f$inversible à gauche d'inverse à gauche $g \Leftrightarrow f$ iso et $g = f^{-1}$
et $\begin{cases} \operatorname{Ker} g &= \{0\} \\ \operatorname{Im} f &= F \end{cases}$

$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}$ Mais $f \circ g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$

En général Montrons qu'<u>en général</u>, $f \circ g$ **est une projection**

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ (f \circ g) &= f \circ (g \circ f) \circ g \\ &= f \circ g \end{aligned}$$

Donc f est bien une projection, donc

$$\operatorname{Im}(f \circ g) \oplus \operatorname{Ker}(f \circ g) = F$$

Montrons $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f$

$\boxed{\subset}$ ok

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Im} f$ ie il existe $y \in E$ tel que

$$\begin{aligned} x &= f(y) \\ &= f(g(f(y))) && \text{car } g \circ f = \mathrm{id}_E \\ &= (f \circ g)(z) && \text{en notant } z = f(y) \\ &\in \operatorname{Im}(f \circ g) \end{aligned}$$

Montrons que $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g$

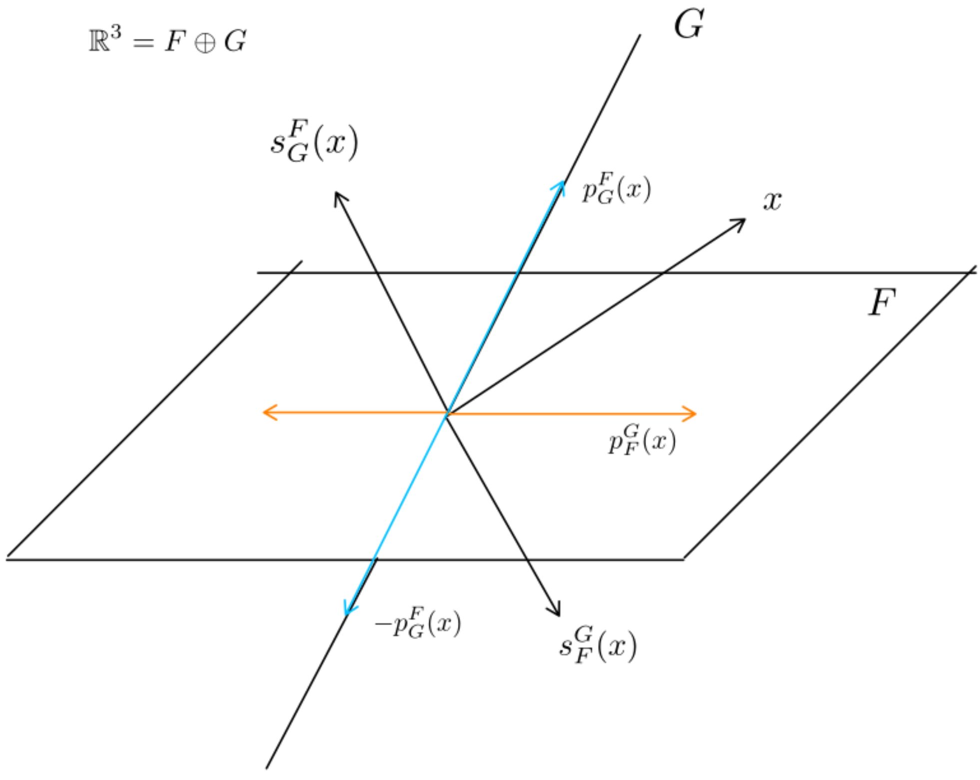
$\boxed{\subset}$ ok !

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$ ie $f(g(x)) = 0_E$

Donc $g(f(g(x))) = g(0_F) = 0_E$ ie $g(x) = 0_E$

V.3 Symétries

On veut **généraliser** la notion de symétrie par rapport à une droite ou à un point. Faisons un dessin dans $\mathbb{R}^3$.



$$s_F^G(x_F + x_G) = x_F - x_G$$

Proposition-Définition 12 .
Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

Il existe un unique endomorphisme $s = s_F^G$ de E tel que $s_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$.

On l'appelle **symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.**

Dit plus simplement : $s_F^G : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$.

Remarque : pour plus de clarté, j'ai encore écrit id_F l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ qui plus rigoureusement est l'injection canonique de F dans E.

Démonstration. C'est un cas particulier de □

Exemple 25 Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La conjugaison est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Proposition 7 : Propriétés immédiates des projections.
Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on a :

i/ $\mathrm{Ker}(s_F^G - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_F^G + \mathrm{id}_E) = F$;

ii/ $\mathrm{Ker}(s_F^G + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_F^G - \mathrm{id}_E) = G$;

iii/ $s_G^F = -s_F^G$;

iv/ $s_F^G = p_F^G - p_G^F$;

v/ $s_F^G \circ s_F^G = \mathrm{id}_E$.

Démonstration. Exercice. Tout est facile.
$\mathrm{Ker}(s_F^G - \mathrm{id}_E)$ sont les points fixes de la symmétrie, *i. e.* les gens qui n'ont pas de composante en G, *i. e.* c'est F □

Là encore on a une réciproque !

Théorème 21 .
Si s est un endomorphisme involutif, alors s est une symétrie.

C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Soit $\begin{cases} s & \in \mathcal{L}(E) \\ s \circ s & = \mathrm{id}_E \end{cases}$

Soir $x \in E$

Analyse Considérons une décomposition convenable $x = x_- + x_+$ où $\begin{cases} x_+ & \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) \\ x_- & \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \end{cases}$

ie :

$$\begin{cases} s(x_+) & = -x_+ \\ s(x_-) & = x_- \end{cases}$$

$$x = x_- + x_+$$

$$s(x) = x_- - x_+$$

$$\begin{cases} \frac{x+s(x)}{2} & = x_- \\ \frac{x-s(x)}{2} & = x_+ \end{cases}$$

Synthèse

— $x = x_- + x_+$ ok

— $x_- \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ car

$$\begin{aligned}
(x - \mathrm{id})(x_-) &= s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) - \left(\frac{x + s(x)}{2}\right) \\
&= \frac{s(x) + x}{2} - \left(\frac{x + s(x)}{2}\right) \\
&= 0_E && \text{par linéarité} \\
x_+ &\in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) && \text{idem}
\end{aligned}$$

Notons $\begin{cases} F &= \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ G &= \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, x_F^G(x) &= x_F - x_G \\
&= \frac{s(x) + x}{2} - \left(\frac{x - s(x)}{2}\right) \\
&= s(x)
\end{aligned}$$

□

Application 14 On retrouve toute une famille de résultats qu'on s'est donc inutilement fatigués à établir au cas par cas dans le passé.