Variables aléatoires

Des lois

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2. On lance $n = 30$ fois un dé à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

On se pose la question suivante : est-il plus probable d'obtenir un nombre inférieur à $\frac{n}{3}$ ou supérieur à $\frac{n}{4}$?

1. Répondre en s'aidant de Python.
2. Répondre sans s'aider de Python.
   Une façon de faire : on pourra appliquer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebytchev.
3. Répondre pour les autres valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Calculatrice autorisée*

On suppose qu'on a $X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

1. L'entier k étant fixé, quelle est la limite de $p(X_n = k)$ pour $n \to +\infty$?

Les élèves d'un professeur préparent leurs exercices une fois sur vingt. À intervalles de temps réguliers, le professeur choisit un élève au hasard et regarde si l'élève a préparé ses exercices, auquel cas il les corrige. Il effectue l'opération cent vingt fois. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de copies corigées.

2. Donner une approximation de $p(X \leqslant 7)$.
3. Donner la valeur exacte de $p(X \leqslant 7)$.

Espérance - Variance

Exercice 4. *Loi géométrique tronquée.*

Soient n un entier naturel et $p \in [0, 1]$.

On dit que X suit la loi géométrique tronquée de paramètres p et n lorsqu'on a :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\} \ ; \\ P(X = 0) = q^n \quad \text{où, comme d'habitude, } q = 1 - p \ ; \\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ P(X = k) = q^{k-1}p. \end{cases}$$

On pourra vérifier, si on le souhaite, que la loi P_X ainsi décrite est bien une loi de probabilité.

1. Quand a-t-on rencontré cet exemple en cours ?
2. On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire 100 fois une pièce équillibrée et on admet qu'on peut modéliser ceci à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. On note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsque les N tirages ont donné face et qui vaut k lorsque la première apparition de pile a eu lieu au k^e lancé. Justifier que X suit une loi géométrique tronquée dont on déterminera les paramètres.
   Généralisation ?
3. Un professeur pose une question de cours à un élève tiré au hasard, et recommence tant qu'il n'a pas obtenu la bonne réponse. On note p la probabilité qu'un élève donne la bonne réponse. Quelle est la probabilité que le premier élève interrogé donne la bonne réponse, sachant que la bonne réponse sera effectivement donnée tôt ou tard ?
4. On suppose que X suit la loi géométrique tronquée de paramètres p et n. Déterminer $E(X)$.
5. On suppose que X suit la loi géométrique tronquée de paramètres p et N. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de $P(X = 0)$ lorsque N tend vers l'infini. Que vient-on de construire en se gardant bien de le dire ?

Exercice 5. *Espérance d'une permutation aléatoire*

On dispose de n boites et de n boules numérotées de 1 à n. Chaque boite peut contenir une et une unique boule. Initialement, chaque boule est rangée dans la boite qui a le même numéro. Mais un petit enfant malicieux vide toutes les boites et remet chaque boule dans n'importe quelle boite, au hasard. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numéro i se trouve dans sa boite, et 0 sinon.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Que représente X ?
2. Quelle est l'espérance de X ?

   On ne demande **pas** *la loi de X (dans cet exercice).*
3. Quelle morale peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 6. Soient $a < b \in \mathbb{N}$ et $X \sim \mathcal{U}(a;b)$. Calculer la variance de X.

V.A.R. INDÉPENDANTES

Exercice 7. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli : $X_1 \sim \mathcal{B}(p_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(p_2)$. On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

1. Quelle est la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$?
2. Quelle est la loi de $Z = X_1X_2$?
3. Quelle est la loi de $T = \max(X_1, X_2)$?
4. Quelle est la loi de $U = X_1 + X_2$?

Exercice 8. On effectue une série de tirages dans une urne de la manière suivante :

- au départ, l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- après chaque tirage, on remet dans l'urne la boule que l'on vient de tirer ainsi qu'une autre boule de la même couleur.

On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

Exercice 9. *Lemme des coalitions*

X_1, …, X_r, X_{r+1}, …, X_n étant des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes :

1. si les $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $f_1(X_1)$, …, $f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes ;
2. si $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$ alors $f(X_1, \dots, X_r)$ et $g(X_{r+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Vecteurs aléatoires

Exercice 10. On tire une permutation σ au hasard de faccon uniforme dans S_n. on considère une fois encore la variable aléatoire X égale au nombre de points fixes de σ. On notera toujours X_i la variable aléatoire égale à 1 si i est un point fixe de σ, et 0 sinon. On rappelle qu'on a déjà calculé l'espérance de X.

1. Pour i et j dans $\{1, 2, ..., n\}$, calculer $Cov(X_i, X_j)$.
2. En déduire $V(X)$.
3. Dans l'exercice 5, on n'a pas calculé la loi de X et on en est resté tout frustré.

   Cette loi **n'est pas** binomiale contrairement à ce qu'on pourrait espérer.

   a. Montrer qu'on a $P(X=0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

   Indication : on relira à profit le cours sur les suites récurrentes linéaires doubles.

   b. En déduire la loi de X.

Exercice 11.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute une même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de Y_n ?
2. Les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles mutuellement indépendantes ? Une Y_i et une Y_j sont-elles indépendantes ?
3. Que vaut $Cov(Y_i, Y_j)$?

Exercice 12. (BCE 2011)

Soit n un entier naturel non nul : $n \geqslant 1$ joueurs visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue de deux tirs. On note enfin $Y = Z - X$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Z ?
3. Que représente la variable aléatoire Y ? Quelle est sa loi ?
4. Les variables X et Y sont-elle indépendantes ?
5. Quelle est leur covariance ?

Indications : on pourra noter

- X_i *la variable aléatoire qui vaut* 1 *lorsque le premier tir du joueur i atteint la cible et* 0 *sinon ;*
- T_i *la variable aléatoire qui vaut* 1 *lorsque le second tir du joueur i atteint la cible et* 0 *sinon ;*
- Z_i *la variable aléatoire qui vaut* 1 *lorsque l'un des deux tirs au moins du joueur i atteint la cible et* 0 *sinon ;*
- Y_i *la variable aléatoire qui vaut* 1 *lorsque le premier tir du joueur i manque sa cible et le second l'atteint, et* 0 *sinon.*