$\boxed{3/c}$ ## Fonctions usuelles, exercices ##

Meth 1 $f = \dfrac{\operatorname{atan} \circ \mathrm{id}^2}{\mathrm{id}} = \dfrac{\operatorname{atan} \circ \mathrm{id}^2}{\mathrm{id}^2} \cdot \mathrm{id}$

Posons $X = \mathrm{id}^2$

$\mathrm{id} \to 0 \Leftrightarrow X \to 0$

$\lim\limits_{0} \dfrac{\operatorname{atan} \circ \mathrm{id}^2}{\mathrm{id}^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{\operatorname{atan} \circ X}{X} = 1$

d'où $\lim\limits_{0} f = 1 \cdot 0 = 0$

f se prolonge par continuité en 0.

Notons f_r le prolongement. On a $f_r(0) = 0$

Meth 2 Notons $g = \operatorname{atan} \circ \mathrm{id}^2$. $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme composée de fonctions dérivables et d'après le TDFC :

$g' = \dfrac{2\,\mathrm{id}}{1 + \mathrm{id}^4}$

$f = x \mapsto \dfrac{g(x)}{x} = x \mapsto \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} g'(0) = \dfrac{2 \cdot 0}{1 + 0^4} = 0$

....

Le prolongement est-il dérivable ?

$\dfrac{f_r(x) - f_r(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{\operatorname{atan}(x^2)}{x} - 0}{x} = \dfrac{\operatorname{atan}(x^2)}{x^2} \longrightarrow 1$

Donc f_r est dérivable en 0 et $f_r'(0) = 1$

$\boxed{4/1}$ On a $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{atan} a - \operatorname{atan} b < \frac{\pi}{2}$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

On pose $\alpha = \operatorname{atan} a$ et $\beta = \operatorname{atan} b$

$\Leftrightarrow a = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow b = \tan\beta$

$$\tan(\operatorname{atan} a - \operatorname{atan} b) = \frac{a-b}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{atan} a - \operatorname{atan} b = \operatorname{atan}\frac{a-b}{1+ab} \quad \text{car } \operatorname{atan} a - \operatorname{atan} b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$\boxed{4/2}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{atan}\frac{1}{k^2+k+1}$$

pour $\begin{cases} a = k \\ b = k+1 \end{cases}$ la question 1 donne:

$$\operatorname{atan}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{atan}(k+1) - \operatorname{atan} k \quad \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ car } k, k+1 \geq 0$$

d'où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{atan}(k+1) - \operatorname{atan} k$$

$$= \operatorname{atan}(n+1) - \operatorname{atan} 0$$

$$= \operatorname{atan}(n+1)$$

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{7/1}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ she shy ch ie

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{y+x}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{\cancel{2}(e^{x+y}-e^{-x-y})}{\cancel{2}\cdot 2}$$

$$= \operatorname{sh}(x+y)$$

$$\operatorname{sh}(2x) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$\boxed{7/2}$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \operatorname{ch}(x+y)$$

$\boxed{7/3}$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}b \operatorname{ch}a}{\operatorname{ch}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sh}a \operatorname{ch}a + \operatorname{sh}b \operatorname{ch}a}{\operatorname{ch}a \operatorname{ch}b}}{\dfrac{\operatorname{ch}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b}{\operatorname{ch}a \operatorname{ch}b}}$$

$$= \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a \operatorname{th}b}$$

$$\operatorname{th}(2a) = \frac{2\operatorname{th}a}{1+\operatorname{th}^2 a}$$

$\boxed{8/2}$

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2^k}}{\operatorname{th}\frac{x}{2^{k-1}}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \ln 2 + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2^k} - \ln \operatorname{th}\frac{x}{2^{k-1}}$$

$$= (n+1)\ln 2 + \ln\left(\operatorname{th}\frac{x}{2^n}\right) - \ln(\operatorname{th}(2x))$$

$$= (n+1)\ln 2 + \ln \frac{\operatorname{th} x/2^n}{\operatorname{th}(2x)}$$

$\boxed{8/1}$

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2^{k-1}}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2^k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2^{k-1}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^k}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$$

$\boxed{5}$ $f = \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right)^{\mathrm{id}} = e^{\mathrm{id} \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}^*,\ 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On résout $1 + \frac{1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1 < 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x > 0 \vee x < -1$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

f est de la forme e^u avec

$u : \begin{cases} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$

$\ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right)$ est dérivable sur D_f comme composée de fns D et

$\left(\ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right)\right)' = \frac{\frac{-1/2}{\mathrm{id}}}{1 + 1/\mathrm{id}} = \frac{-1}{\mathrm{id}^2 + \mathrm{id}}$

Donc u est dérivable comme produit de dérivée

$u' = \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right) - \frac{1}{\mathrm{id}+1}$

Finalement $f = e^u$ est dérivable sur D_f de dérivée

$u'e^u = u'f = x \mapsto \underbrace{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)}_{?}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}_{>0}$

Pour $x \in D_f$ déterminer le signe de

$$u' = \ln \circ \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Étudions u' : u' est dérivable come some et

$$u'' = \frac{-1}{x^2+x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1) + x}{x \cdot (x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
u''		$+$				$-$	
u'	0	$\nearrow$ $\oplus$				$\oplus$ $\searrow$	0
f'		$+$				$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e

$\lim_{-\infty} u' = 0$ $\lim_{+\infty} u' = 0$

$\lim_{\pm\infty} f = e$ par continuité de exp en 1 et car $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$

et $x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+0)}{\frac{1}{x} - 0}$

Posons $h = \frac{1}{x}$ $x \to \pm\infty \Leftrightarrow h \to 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ car

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[-1^-]{} -\infty \Rightarrow x \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[-1^-]{} +\infty$$

$$\Rightarrow e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} \xrightarrow[x \to -1^-]{} +\infty$$

$\lim\limits_{0} f = 1$ par continuité de exp en 0 et car

$$x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= x \ln(x+1) - x \ln x$$

$$\begin{cases} x \ln(x+1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \cdot 0 = 0 & \text{(pas une FI)} \\ x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 & \text{par croissance comparée} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 - 0 = 0$$