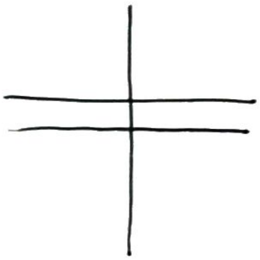
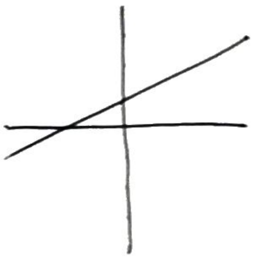
Fonctions usuelles, exercices

⚠ Pour montrer $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, on peut étudier $f-g$ et mt $f g \leq$
et mt $f-g \leq 0$

$\boxed{1/1}$ $P_0 = \frac{x^0}{0!} = 1$; $P_1 = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} = 1 + x$; $P_2 = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}$
$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$



$\boxed{P_0}$



$\boxed{P_1}$

$\boxed{P_2}$

$P_2(0) = 1$
$\min P_2 = \frac{1}{2}$

$\boxed{1/2}$ On veut mtq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq P_n(x)$.
Procédons par récurrence : montrons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x - P_n(x) \geq 0$.

<u>Initialisation</u>

$$(\exp - P_0)(0) = e^0 - 1 = 0 \geq 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

<u>Hérédité</u> Mtq $\exp - P_n \geq 0 \Rightarrow \exp - P_{n+1} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Supposons $\exp - P_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ (\exp - P_{n+1})' = \exp - \left(1 + \frac{2 \cdot}{2} + \frac{3 \cdot^2}{6} + \cdots + \frac{n \, id^{n-1}}{n!} + \frac{(n+1) \, id^n}{(n+1)!}\right)$$
$$= \exp - P_n$$

Donc par hdr, $(\exp - P_{n+1})' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

x	0		$+\infty$
$(\exp - P_{n+1})'$		$+$	
$\exp - P_n$	0	$\nearrow$	

donc $(\exp - P_{n+1}) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$
On a montré l'hérédité
<u>CCL</u>

$\boxed{3}$

rq $\frac{\text{atan}}{\text{id}}(x) = \frac{\text{atan}\, x - \text{atan}\, 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \text{atan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$

$\boxed{3/c}$

$\lim\limits_{0} \frac{\text{atan}}{\text{id}} = 1 \in \mathbb{R}$ donc $\frac{\text{atan}}{\text{id}}$ se prolonge par continuité en 0.

Notons $\left(\frac{\text{atan}}{\text{id}}\right)_\sim$ son prolongement par continuité.

On a $\frac{\text{atan}}{\text{id}}(0) = 1$.

Admettons provisoirement qu'on a :

$$\forall x \in [0,1],\ x - \frac{x^3}{3} \leq \text{atan}\, x \leq x \qquad (\bigstar)$$

Pour $x \in]0, 1]$

$$\frac{\frac{\text{atan}}{\text{id}}(0) - \frac{\text{atan}}{\text{id}}(x)}{x - 0} = \frac{\frac{\text{atan}\, x}{x} - 1}{x}$$

$$= \frac{\text{atan}\, x - 1}{x^2}$$

De plus, $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{atan}\, x \leq x$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^3}{3} \leq \text{atan}\, x - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{3} \leq \frac{\text{atan}\, x - x}{x^2} \leq 0$$

D'après le TdG, $\begin{cases} \lim\limits_{0^+} \frac{\text{atan} - \text{id}}{\text{id}^2} = 0 \\ \lim\limits_{0^-} \frac{\text{atan} - \text{id}}{\text{id}^2} = -0 = 0 \quad \text{par imparité de } \frac{\text{atan} - \text{id}}{\text{id}^2} \end{cases}$

<u>Conclusion</u> Le prolongement $\left(\frac{\text{atan}}{\text{id}}\right)_{\lambda}$ est dérivable en 0 et :

$$\left(\frac{\text{atan}}{\text{id}}\right)_{\lambda}'(0) = 0$$

Montrons ($\bigstar$)

Posons $g = \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{atan}\, x - x \end{cases}$

Mtq $g \leq 0$ sur $[0, 1]$

$$g' = \frac{1}{1+\text{id}^2} - 1$$

Pour $x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$$

$[0, 1]$ est un intervalle. D'après le TSD[1]

$$\begin{cases} g \searrow \text{ sur } [0, 1] \\ g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow g \leq 0 \text{ sur } [0, 1]$$

Posons $h = \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{atan}\, x - x + \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Mtq $h \geqslant 0$ sur $[0, 1]$

$$h' = \frac{1}{1+\text{id}^2} - 1 + \text{id}^2 = \frac{1 - (1+\text{id}^2) + \text{id}^2(1+\text{id}^2)}{1+\text{id}^2}$$

---

[1] Théorème sur le Signe de la dérivée

$$= \frac{id^2(1+id^2) - id^2}{1+id^2}$$

$$= \frac{id^2(id^2)}{1+id^2}$$

$$= \frac{id^4}{1+id^2}$$

$$\geqslant 0$$

$[0, 1]$ est un intervalle donc $h \nearrow$ sur $[0, 1]$

De plus, $h(0) = 0 \Rightarrow h \geqslant 0$ sur $[0, 1]$

$\boxed{3/a}$ $\quad f = \frac{\text{atan}}{id^2} = \text{atan} \cdot \frac{1}{id^2} = \frac{\text{atan}}{id} \cdot \frac{1}{id}$

$\lim\limits_{0^+} f = +\infty \quad \lim\limits_{0^-} f = -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^+} f \neq \lim\limits_{0^-} f \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{0^+} f \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $\frac{\text{atan}}{id^2}$ n'a pas de limite en 0