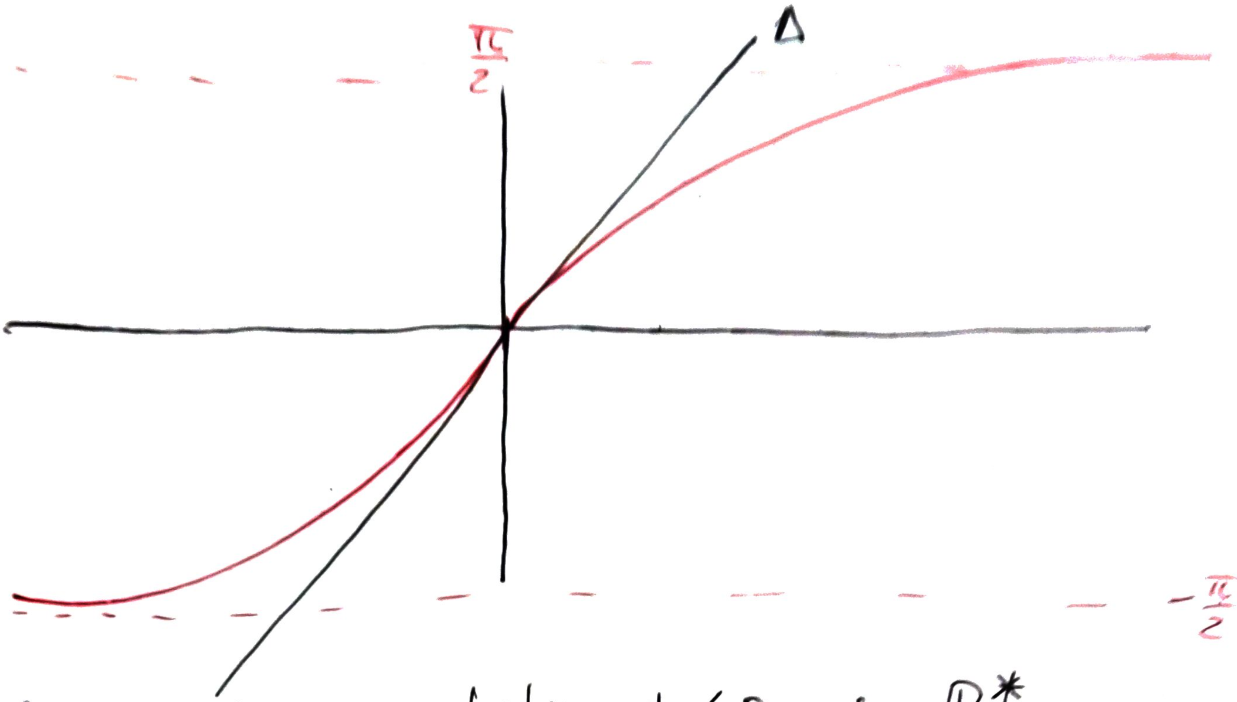
$\boxed{\text{CCINP 43}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} - y_n = \operatorname{Atan} u_n - u_n$



« Ça se voit » que $\begin{cases} \operatorname{atan} - \mathrm{id} < 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ \operatorname{atan} + \mathrm{id} > 0 & \text{sur } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

<u>Montrons-le</u> pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{atan} x - x \end{cases}$

f est dérivable comme différence de fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} < 0 \text{ sauf pour } x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f	$+$	0	$-$

Si $x_0 \overset{<}{>} 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \overset{<}{>} 0$

par récurrence immédiate ($u_{n+1} = \text{Atan } u_n \wedge \text{Atan} \in \nearrow$,)

Auquel cas pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \underset{>}{<} 0$

Donc $u \in \underset{\nearrow}{\searrow}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On considère tq $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{atan } u_n \end{cases}$

D'après $\boxed{1}$ $u \to 0$

$$h(\text{atan } u_{n-1}) = h(u_{n-1})$$

ie $h(u_n) = h(u_{n-1}) = h(\text{atan}(u_{n-2}))$

$$= h(u_{n-2})$$

$\vdots$ récurrence immédiate

$$= h(u_0) = h(x)$$

$$h(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(0) \quad \text{par continuité de } h$$

$$\begin{matrix} h(u_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & h(0) \\ \| & & \| \\ h(x) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & h(x) \end{matrix}$$

Par unicité de la limite $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc h constante.

Réciproquement : $h(x) = h(0)$.

$h(\mathrm{Atan}\, x) = h(\mathrm{Atan}\, 0) = h(0) = h(x)$

9/1 (suite)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supp u non-majorée donc non-majorée $\overset{\text{nécess.}}{\text{APCR}}$

ie $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \ u_n > A$

Pour $A = 1$ et $n_0 = n_1 + 1$, on obtient $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_1} > 1$

Pour $A = 2$ et $n_0 = n_2 + 1$, on obtient $n_3 \in \mathbb{N}$, tq $u_{n_2} > 2$

Pour $A = 3$ et $n_0 = n_3 + 1$, on obtient $n_4 \in \mathbb{N}$, tq $u_{n_3} > 3$

$\vdots$

Pour $A = k$ et $n_k = n_k + 1$, on obtient $n_k > n_{k-1}$, tq $u_{n_k} > k$

On a $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u tq

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ u_{n_k} > k$$

TDG : $u_{n_k} \longrightarrow +\infty$