Fractions rationnelles

Exercice 1. © ★ *Homographies*

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}(X)$ suivant : $\mathcal{H} = \left\{ \dfrac{aX+b}{cX+d},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ ad-bc \neq 0 \right\}$.

On considère également le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivant : $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ ad-bc \neq 0 \right\}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$ forme un groupe.
2. Montrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ forme un groupe.
3. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{aX+b}{cX+d} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupe. Image ? Noyau ?

Exercice 2. © ★*Pôles simples.*

On suppose que λ est un pôle simple de $\dfrac{A(X)}{B(X)}$.
La DES de $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ est donc de la forme $\dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{\alpha}{X-\lambda} + G(X)$ où λ n'est pas pôle de $G(X)$.
Montrer qu'on a $\alpha = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.

Application : calculez la DES de $\dfrac{X^2+X+2}{X^3-X}$ à l'aide de cette méthode.

Exercice 3. © ★★ *Racines de l'unité.*

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n-1}$.
On pourra sans obligation d'achat utiliser l'exercice précédent.