Def. 1: trou

$$A_1(X)B_2(X) = A_2(X)B_1(X)$$

Prop-Def. 2: Dem.

Existance Soit $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$
Notons $D := A \wedge B$
Puis $\begin{cases} \tilde{A} & = \frac{A}{D} \\ \tilde{D} & = \frac{B}{D} \end{cases}$
Par homogénéité de PGCD :

$$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = 1$$

On note μ le coefficient dominant de B puis

$$P = \frac{\tilde{A}}{\mu}$$
$$Q = \frac{\tilde{B}}{\mu}$$

On a bien $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ \frac{P}{Q} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \frac{A}{B} \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$

Unicité Supposons avoir deux formes irréductibles

$$\frac{A}{B} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

donc $P_1Q_2 = P_2Q_1$
On a

$$\begin{cases} Q_1 & | P_1Q_2 \\ P_1 \wedge Q_1 & = 1 \end{cases}$$

donc $Q_1 | Q_2$ d'après le lemme de Gauss
$Q_2 | Q_1$ de même

Or Q_1, Q_2 sont unitaires donc $Q_1 = Q_2$
En réinjectant et par intégrité $P_1 = P_2$

Exercice 1

$$P' \wedge P = 1 \iff P \text{ unitaire et toutes ses racines sont simples}$$

Prop-Def. 3 dem. L'indépendance au représentant choisi

Prop-Def. 5 dem. Soit $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

$i.e. A \times D = C \times B$

On veut montrer

$$\begin{aligned} \frac{A'B - AB'}{B^2} &= \frac{C'D - D'C}{D^2} \\ \iff D^2(A'B - B'A) &= B^2(C'D - D'C) \\ \iff A'BD^2 - ADB'D &= C'B^2DB - CD'B^2 \\ \iff A'BD^2 - BCB'D &= C'BDB - ADD'B \\ \iff BD(A'D - CB') &= BD(C'B - AD') \\ \iff A'D - CB' &= C'B - AD' \\ \iff A'D + AD' &= C'B + CB' \\ \iff (AD)' &= (BC)' \end{aligned}$$

C'est vrai, ouf!!!

Exemple 1

$$\frac{aX + b}{cX + d}$$

Exemple 2: Trou juste avant

$$F' \leq \deg F - 1$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} \deg \left(\frac{aX + b}{cX + d} \right)' &= \frac{a(cX + d) - c(aX + b)}{(cX + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cX + d)^2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Def. 7: Reformulation, trous

1. λ n'est ni un zéro ni un pôle.
2. λ est un zéro de multiplicité $a - b$
3. λ est pôle de multiplicité $b - a$

Remq. 5: Trou les zéros de $\frac{A}{B}$

Prop-Def. 9: Dem. D'après le théorème de division euclidienne

$$\exists!(Q,R),\ \begin{cases} A &= BQ+R \\ Q &\in \mathbb{K}[X] \\ R &\in \mathbb{K}_{\deg B-1}[X] \end{cases}$$

$$\iff \exists!(Q,R),\ \begin{cases} F &= Q+\frac{R}{B} \\ Q &\in \mathbb{K}[X] \\ \deg R &< \deg B \end{cases}$$

$$\iff \exists!(Q,R),\ \begin{cases} F &= Q+G \\ Q &\in \mathbb{K}[X] \\ \underbrace{\deg(BG)-\deg B}_{\deg G} &< 0 \end{cases}$$

Exemple: partie polynomiale de $\frac{X^3+2X+1}{X^2-1}$

$$\begin{array}{c|c} X^3+2X+1 & X^2-1 \\ X^3-X & \text{X} \\ 3X+1 & \end{array}$$

$$\frac{X^3+2X+1}{X^2-1} = \underbrace{X}_{\text{partie polynomiale}} + \frac{3X+1}{X^2+1}$$

Thm. 2 Si $B=\mu(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ alors il existe Q unique et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ uniques tels que

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X-\lambda_n}$$

et Q est la partie polynomiale de $\frac{A}{B}$

Thm. 2: Dem. D'après le théorème de division euclidienne, il suffit de montrer que

$$\forall R \in \mathbb{R}_{\deg B-1}[X],\ \exists! \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X-\lambda_n}$$

Notons $\begin{cases} E &= \mathbb{K}^n \\ F &= \frac{1}{B} \quad \underbrace{\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]}_{\text{polynômes de degré } < \deg B} \end{cases}$

$$\phi : \begin{cases} E & \to F \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} & \mapsto \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X-\lambda_n} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]\right) &= n\\ \implies \dim\left(\frac{1}{B}\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]\right) &= n\\ \text{et } \dim\mathbb{K}^n &= n\end{aligned}$$

ϕ est linéaire par distributivité de $\cdot$ sur $+$
Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie:

$$\phi \text{ bijective} \iff \phi \text{ injective}$$

$$\operatorname{Ker}\phi = \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{X-\lambda_n}=0\right\}$$

Or $\left(\frac{1}{X-\lambda_1},\ \frac{1}{X-\lambda_2},\ \ldots,\ \frac{1}{X-\lambda_n}\right)$ est *libre*
Donc $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$ donc ϕ est bijective
$i.e. \forall \frac{R}{B} \in F,\ \exists! \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \phi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \frac{R}{B}$
$i.e. \forall R \in \mathbb{R}_{\deg B-1}[X],\ \exists! \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{X-\lambda_n}$

Exemple DES de $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)}$

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\alpha X+\beta}{X^2+1}+\frac{\gamma X+\delta}{X^2+4}$$

Passons par $\mathbb{C}(X)$

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+i}+\frac{c}{X-2i}+\frac{d}{X+2i}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(X+i)(X-i)}a+(X-i)(\ldots) \quad \times(X-i)a && = -\frac{i}{6} \impliedby X=i\\
&b=\overline{a}=\frac{i}{6} && \text{par unicité de la DES}\\
&\frac{1}{(X^2+1)(X+2i)}c+(X-i)(\ldots) \quad \times(X-2i)a && = \frac{i}{12} \impliedby X=2i\\
&b=\overline{c}=-\frac{i}{12} && \text{par unicité de la DES}
\end{aligned}$$

En regroupant chaque pôle avec son conjugué:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} &= \frac{1}{6}\left(\frac{i}{X+i}-\frac{i}{X-i}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{i}{X-2i}-\frac{i}{X+2i}\right)\\
&= \frac{1}{6}\frac{2}{X^2+1}+\frac{1}{12}\frac{-4}{X^2+4}\\
&= \frac{1/3}{X^2+1}-\frac{1/3}{X^2+4}
\end{aligned}
$$

Thm. 3: Dem.

$$
\begin{aligned}
P &= \mu\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}\\
\deg P &= \sum_{k=1}^{r} m_k\\
P' &=
\end{aligned}
$$

En général:

$$
\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)' = \sum_{k=1}^{n} u_1\cdots u_{i-1}\cdot u_i'\cdot u_{i+1}\cdots u_n
$$

$$
\begin{aligned}
P' &= \mu\sum_{k=1}^{r}(X-\lambda_1)^{m_1}\times\ldots\times(X-\lambda_{i-1})^{m_{i-1}}\times((X-\lambda_i)^{m_i})'\times(X-\lambda_{i+1})^{m_{i+1}}\times\ldots\times(X-\lambda_r)^{m_r}\\
\frac{P'}{P} &= \sum_{k=1}^{r}\frac{(X-\lambda_1)^{m_1}\times\ldots\times(X-\lambda_{i-1})^{m_{i-1}}\times m_i\times(X-\lambda_{i+1})^{m_{i+1}}\times\ldots\times(X-\lambda_r)^{m_r}}{(X-\lambda_1)^{m_1}\times\ldots\times(X-\lambda_{i-1})^{m_{i-1}}\times(X-\lambda_i)^{m_i}\times(X-\lambda_{i+1})^{m_{i+1}}\times\ldots\times(X-\lambda_r)^{m_r}}\\
&= \sum_{k=1}^{r}\frac{m_i}{X-\lambda_i}
\end{aligned}
$$

App. 7 Cherchons les solutions non nulles
Notons $n := \deg P$

$$
\begin{aligned}
P'|P &\iff \exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P = P'\times Q\\
&\iff \exists Q\in\mathbb{R}_1[X],\ P = P'\times Q && \text{pour des raisons de degré}\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ P = P'\times\frac{1}{n}(X-\lambda) && \text{pour des raisons de coefficient dominant} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, \frac{P'}{P} = \frac{n}{X-\lambda}\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, P = \mu(X-\lambda)^n
\end{aligned}
$$