$\mathbb{K}(X)$

$\mathbb{K}(X)$ est à $\mathbb{K}[X]$ ce que $\mathbb{Q}$ est à $\mathbb{Z}$. L'anneau des polynômes n'est pas un corps. On "rajoute formellement les inverses" des polynômes non nuls, on "prolonge canoniquement $+$, $\times$ et deg", et on obtient un corps, $(\mathbb{K}(X), +, \times)$.

I Corps $\mathbb{K}(X)$

I.1 Définition. Forme irréductible.

Conseil : implémenter la construction en utilisant votre Classe *Polynome* et en vous inspirant de la constrution de $\mathbb{Q}$ faite en cours.

Définition 1 : Fraction rationnelle.

On appelle <u>fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$</u> une expression de la forme $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$, où $A(X) \in \mathbb{K}[X]$, $B(X) \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, sachant qu'on a $\dfrac{A_1(X)}{B_1(X)} = \dfrac{A_2(X)}{B_2(X)}$ si et seulement si

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}(X)$.

Remarque 1

On identifie tout élément $P(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ à l'élément $\dfrac{P(X)}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$ correspondant. On considère donc qu'on a $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

Dans la suite, on parlera de **représentant** pour désigner **une** écriture possible parmi d'autres d'une fraction rationnelle. Par exemple « $\dfrac{X^2}{X^2+X}$ » et « $\dfrac{X^2+X}{(X+1)^2}$ » sont deux représentants d'une même fraction rationnelle... qu'on a davantage envie de noter $\dfrac{X}{X+1}$, c'est le sens de la proposition ci-dessous.

Proposition-Définition 2 : Existence et unicité de la forme irréductible..

Soit $F(X) \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique couple $(P(X), Q(X)) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$, tel que $\begin{cases} F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \\ P(X) \wedge Q(X) = 1 \\ Q(X) \text{ unitaire.} \end{cases}$

Cette écriture de $F(X)$ est appellée <u>forme irréductible</u> de $F(X)$.

Démonstration. La même que pour $\mathbb{Q}$.

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{C}[X]$ pour que $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$ soit une forme irréductible.

I.2 Opérations et structure

Proposition-Définition 3 .

Les opérations $+$, $\times$, $\cdot$ suivantes sont bien définies :

- $\dfrac{A(X)}{B(X)} + \dfrac{C(X)}{D(X)} = \dfrac{A(X)D(X) + C(X)B(X)}{B(X)D(X)}$;
- $\dfrac{A(X)}{B(X)} \times \dfrac{C(X)}{D(X)} = \dfrac{A(X)C(X)}{B(X)D(X)}$;
- $\lambda \cdot \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{\lambda A(X)}{B(X)}$.

Démonstration. Il faut montrer .... C'est facile.

Théorème 1 .

$(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ forme une algèbre pour laquelle $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Démonstration. Tout est essentiellement évident par construction. Il suffit de l'écrire.

Proposition-Définition 4 : Composition.

Si $G(X)$ n'est pas constante et $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ on peut définir $F \circ G = \dfrac{\tilde{A}(G(X))}{\tilde{B}(G(X))}$ avec $\tilde{A}, \tilde{B} : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$.

Démonstration. Supposons $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{C(X)}{D(X)}$. Alors $A(X)D(X) = B(X)C(X)$ donc dans $\mathbb{K}(X)^{\mathbb{K}(X)}$ on a $\tilde{A}\tilde{D} = \tilde{B}\tilde{C}$ et en particulier $\tilde{A}(G(X))\tilde{D}(G(X)) = \tilde{B}(G(X))\tilde{C}(G(X))$.

Comme $G(X)$ n'est pas constant on a $\tilde{B}(G(X)), \tilde{D}(G(X)) \neq 0$ (on peut faire un calcul direct pour le voir, et ce sera précisé plus loin) et donc $\dfrac{\tilde{A}(G(X))}{\tilde{B}(G(X))} = \dfrac{\tilde{C}(G(X))}{\tilde{D}(G(X))}$. L'application est donc bien définie.

I.3 Dérivation

Proposition-Définition 5 .

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$. On définit bien une fraction rationnelle en posant $F'(X) = \dfrac{A'(X)B(X) - A(X)B'(X)}{B(X)^2}$.

Démonstration. Il faut voir l'indépendance au représentant choisi. Faisons-le.

Remarque 2 On définit de même, par récurrence, $F''(X),\ \ldots,\ F^{(n)}(X), \ldots$.

Remarque 3 Les propriétés algébriques de la dérivation sont les mêmes que d'habitude :

- $F \mapsto F'$ est linéaire, donc $F \mapsto F^{(n)}$ est linéaire ;
- $\forall\ F, G \in \mathbb{K}(X),\ (FG)' = F'G + FG'$, donc $\forall\ F, G \in \mathbb{K}(X),\ (FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$;
- $\forall\ F, G \in \mathbb{K}(X),\ (F \circ G)' = G' \times F' \circ G$, donc $\forall\ F \in \mathbb{K}(X),\ F^{(n)}(\alpha X + \beta) = \alpha^n F^{(n)}(\alpha X + \beta)$.

Démonstration. On se ramène aux formules analogues pour les polynômes par définition de la dérivation des fractions rationnelles.

I.4 Degré

Proposition-Définition 6 .

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$. On définit un élément $\deg(F) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ en posant $\deg(F) = \deg(A(X)) - \deg(B(X))$.

Démonstration. Il faut voir l'indépendance au représentant choisi. Facile, exo.

$\deg(F) = -\infty \Leftrightarrow F = 0$ MAIS $\deg(F) = 0 \not\Rightarrow F$ constante.

Exemple 1 ....

Remarque 4

Soit $F(X),\ G(X) \in \mathbb{K}(X)$. Alors on a

- $\deg(F + G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G))$;
- $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$;
- et si G non constant, $\deg(F \circ G) = \deg(F) \times \deg(G)$.

Démonstration. Un peu pénible, mais il suffit de l'écrire. Exo.

En général on a seulement $\deg(F')$

Exemple 2 ....

II Zéros, pôles, et fonctions associées

II.1 Zéros et pôles

Définition 7 .

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ d'écriture **irréductible** $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

- Une racine de P est appelée un zéro de F.
- Une racine de Q est appelée un pôle de F.

Et plus précisément :

- Une racine de P de multiplicité r est appelée un zéro de F de multiplicité r.
- Une racine de Q de multiplicité s est appelée un pôle de F de multiplicité s.

Reformulation :
Soit $F(X)$ une fraction rationnelle pouvant s'écrire $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ (non nécessairement irréductible) avec λ racine de $A(X)$ de multiplicité a **et** de $B(X)$ de multiplicité b. On a alors trois cas :

1. si $a = b$, alors .... ;
2. si $a > b$, alors .... ;
3. si $a < b$, alors ....

Remarque 5

Si $A(X)$ et $B(X)$ non nuls, les pôles de $\dfrac{B(X)}{A(X)}$ sont

II.2 Fonctions rationnelles

Proposition-Définition 8 .

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} \in \mathbb{K}(X)$. On peut définir une application $\tilde{F}$ par $\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } F\} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{A(x)}{B(x)} \end{cases}$,
quitte à faire un prolongement par continuité si $A(X) \wedge B(X) \neq 1$.

Démonstration. Immédiat.

Remarque 6

Soient $F(X)$, $G(X) \in \mathbb{K}(X)$. Pour x tel que cela ait un sens, on a :

- $\widetilde{F+G}(x) = \tilde{F}(x) + \tilde{G}(x)$;
- $\widetilde{F \times G}(x) = \tilde{F}(x) \times \tilde{G}(x)$;
- $\widetilde{F \circ G}(x) = \tilde{F}\Big(\tilde{G}(x)\Big)$;
- $\widetilde{F'}(x) = \tilde{F}'(x)$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Démonstration. Exo. Le plus difficile est de préciser où doit vivre x.

III Décomposition en éléments simples

III.1 Partie entière (ou polynomiale)

Proposition-Définition 9 .

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} \in \mathbb{K}(X)$, alors il existe un unique polynôme $Q(X)$ tel que $F(X) = Q(X) + G(X)$ pour une fraction rationnelle $G(X)$ telle que $\deg(G(X)) < 0$.

On appelle $Q(X)$ la partie polynomiale ou partie entière de $F(X)$.

Démonstration.

III.2 Décomposition en éléments simples

Théorème 2 : Théorème de DES dans le cas sàrs.

DÉMONSTRATION.

Exercice 2. Retrouver les énoncés des trois autres cas (vus en TACMAS).

La même démonstration s'adapte, modulo plus ou moins de contorsions, aux trois autres **théorèmes**.
Remarquons que dans $\mathbb{C}(X)$, il n'y a que deux théorèmes de DES, car tout polynôme est scindé. Dans $\mathbb{R}(X)$, il y en a quatre. Mais même l'énoncé du "cas général" dans $\mathbb{R}(X)$ est déjà un cas particulier puisqu'il s'appuie fondamentalement sur le fait que les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont nécessairement de degré 1 ou 2.

Rappelons quelques techniques de décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

- Multiplier par $(X - \lambda_i)^{m_i}$ et évaluer en λ_i ;
- Faire baisser la multiplicité en soustrayant à chaque membre les termes connus ;
- Utiliser la parité et l'unicité ;
- Multiplier par X^μ et prendre la limite en ∞ ;
- Évaluer en des non-pôles ;
- Utiliser la conjugaison ;
- Méthode du désespoir : réduire, identifier, SL.

III.3 Décomposition de $\frac{P'(X)}{P(X)}$

Théorème 3 .

Soit $P(X) = \mu(X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r} \in \mathbb{C}[X]$.

Alors la DES de $\dfrac{P'}{P}$ est

Démonstration.

Remarque 7

Si $P(X) \in \mathbb{R}(X)$ est scindé, on connaît donc la DES de $\frac{P'(X)}{P(X)}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Si $P(X)$ n'est pas scindé, on connaît sa DES dans $\mathbb{C}(X)$ et il suffit de regrouper les termes correspondant à un pôle et au pôle qui lui est conjugué pour retrouver sa DES dans $\mathbb{R}(X)$.

Application 1 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P' \mid P$ en utilisant la DES de $\dfrac{P'}{P}$.