

Def. 1: trou

$$A_1(X)B_2(X) = A_2(X)B_1(X)$$

Prop-Def. 2: Dem.

Existance Soit $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$

Notons $D := A \wedge B$

$$\text{Puis } \begin{cases} \tilde{A} = \frac{A}{D} \\ \tilde{B} = \frac{B}{D} \end{cases}$$

Par homogénéité de PGCD :

$$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = 1$$

On note μ le coefficient dominant de B puis

$$\begin{aligned} P &= \frac{\tilde{A}}{\mu} \\ Q &= \frac{\tilde{B}}{\mu} \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ \frac{P}{Q} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \frac{A}{B} \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

Unicité Supposons avoir deux formes irréductibles

$$\frac{A}{B} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

donc $P_1Q_2 = P_2Q_1$

On a

$$\begin{cases} Q_1 & | P_1Q_2 \\ P_1 \wedge Q_1 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } Q_1 &| Q_2 \\ Q_2 &| Q_1 \end{aligned}$$

d'après le lemme de Gauss
de même

Or Q_1, Q_2 sont unitaires donc $Q_1 = Q_2$

En réinjectant et par intégrité $P_1 = P_2$

Exercice 1

$$P' \wedge P = 1 \iff P \text{ unitaire et toutes ses racines sont simples}$$

Prop-Def. 3 dem. L'indépendance au représentant choisi

Prop-Def. 5 dem. Soit $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$
i.e. $A \times D = C \times B$
 On veut montrer

$$\begin{aligned}
 \frac{A'B - AB'}{B^2} &= \frac{C'D - D'C}{D^2} \\
 \iff D^2(A'B - B'A) &= B^2(C'D - D'C) \\
 \iff A'BD^2 - ADB'D &= C'B^2DB - CD'B^2 \\
 \iff A'BD^2 - BCB'D &= C'BDB - ADD'B \\
 \iff BD(A'D - CB') &= BD(C'B - AD') \\
 \iff A'D - CB' &= C'B - AD' \\
 \iff A'D + AD' &= C'B + CB' \\
 \iff (AD)' &= (BC)'
 \end{aligned}$$

C'est vrai, ouf!!!

Exemple 1

$$\frac{aX + b}{cX + d}$$

Exemple 2: Trou juste avant

$$F' \leq \deg F - 1$$

Exemple 2

$$\begin{aligned}
 \deg \left(\frac{aX + b}{cX + d} \right)' &= \frac{a(cX + d) - c(aX + b)}{(cX + d)^2} \\
 &= \frac{ad - bc}{(cX + d)^2} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Def. 7: Reformulation, trous

1. λ n'est ni un zéro ni un pôle.
2. λ est un zéro de multiplicité $a - b$
3. λ est pôle de multiplicité $b - a$

Remq. 5: Trou les zéros de $\frac{A}{B}$

Prop-Def. 9: Dem. D'après le théorème de division euclidienne

$$\begin{aligned} & \exists!(Q, R), \begin{cases} A = BQ + R \\ Q \in \mathbb{K}[X] \\ R \in \mathbb{K}_{\deg B-1}[X] \end{cases} \\ \iff & \exists!(Q, R), \begin{cases} F = Q + \frac{R}{B} \\ Q \in \mathbb{K}[X] \\ \deg R < \deg B \end{cases} \\ \iff & \exists!(Q, R), \begin{cases} F = Q + G \\ Q \in \mathbb{K}[X] \\ \underbrace{\deg(BG) - \deg B}_{\deg G} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple: partie polynomiale de $\frac{X^3+2X+1}{X^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 2X + 1 & X^2 - 1 \\ X^3 - X & X \\ \hline 3X + 1 & \end{array}$$

$$\frac{X^3 + 2X + 1}{X^2 - 1} = \underbrace{X}_{\text{partie polynomiale}} + \frac{3X + 1}{X^2 - 1}$$

Thm. 2 Si $B = \mu(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ alors il existe Q unique et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uniques tels que

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{\alpha_1}{X - \lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - \lambda_n}$$

et Q est la partie polynomiale de $\frac{A}{B}$

Thm. 2: Dem. D'après le théorème de division euclidienne, il suffit de montrer que

$$\forall R \in \mathbb{K}_{\deg B-1}[X], \exists! \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{X - \lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - \lambda_n}$$

$$\text{Notons } \begin{cases} E = \mathbb{K}^n \\ F = \frac{1}{B} \underbrace{\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]}_{\text{polynômes de degré } < \deg B} \end{cases}$$

$$\phi : \begin{cases} E \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow F \\ \mapsto \frac{\alpha_1}{X - \lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - \lambda_n} \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]) &= n \\ \implies \dim\left(\frac{1}{B}\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]\right) &= n \\ \text{et } \dim \mathbb{K}^n &= n \end{aligned}$$

ϕ est linéaire par distributivité de \cdot sur $+$
Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie:

$$\phi \text{ bijective} \iff \phi \text{ injective}$$

$$\text{Ker } \phi = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{X-\lambda_n} = 0 \right\}$$

Or $\left(\frac{1}{X-\lambda_1}, \frac{1}{X-\lambda_2}, \dots, \frac{1}{X-\lambda_n}\right)$ est *libre*
Donc $\text{Ker } \phi = \{0\}$ donc ϕ est bijective

$$i.e. \forall \frac{R}{B} \in F, \exists! \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \phi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \frac{R}{B}$$

$$i.e. \forall R \in \mathbb{R}_{\deg B-1}[X], \exists! \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \frac{R}{B} = \frac{\alpha_1}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{X-\lambda_n}$$

Exemple DES de $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)}$

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2+4}$$

Passons par $\mathbb{C}(X)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} &= \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-2i} + \frac{d}{X+2i} \\ \frac{1}{(X+i)(X-i)} a + (X-i)(\dots) &\times (X-i)a &&= -\frac{i}{6} \iff X=i \\ b = \bar{a} &= \frac{i}{6} &&\text{par unicité de la DES} \\ \frac{1}{(X^2+1)(X+2i)} c + (X-i)(\dots) &\times (X-2i)a &&= \frac{i}{12} \iff X=2i \\ b = \bar{c} &= -\frac{i}{12} &&\text{par unicité de la DES} \end{aligned}$$

En regroupant chaque pôle avec son conjugué:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(X^2+1)(X^2+4)} &= \frac{1}{6} \left(\frac{i}{X+i} - \frac{i}{X-i} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{i}{X-2i} - \frac{i}{X+2i} \right) \\
&= \frac{1}{6} \frac{2}{X^2+1} + \frac{1}{12} \frac{-4}{X^2+4} \\
&= \frac{1/3}{X^2+1} - \frac{1/3}{X^2+4}
\end{aligned}$$

Thm. 3: Dem.

$$\begin{aligned}
P &= \mu \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \\
\deg P &= \sum_{k=1}^r m_k \\
P' &=
\end{aligned}$$

En général:

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i \right)' = \sum_{k=1}^n u_1 \cdots u_{i-1} \cdot u_i' \cdot u_{i+1} \cdots u_n$$

$$\begin{aligned}
P' &= \mu \sum_{k=1}^r (X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \times ((X - \lambda_i)^{m_i})' \times (X - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{m_r} \\
\frac{P'}{P} &= \sum_{k=1}^r \frac{(X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \times m_i \times (X - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{m_r}}{(X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \times (X - \lambda_i)^{m_i} \times (X - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{m_r}} \\
&= \sum_{k=1}^r \frac{m_i}{X - \lambda_i}
\end{aligned}$$