$\mathbb{R}$

Encadrements – Inéquations

Exercice 1. Encadrements

1. Pour $x \in [-3, 3]$ et $y \in]-4, 2[$, encadrer $(x+y)^2$.
2. **Inégalité à retenir** : montrer qu'on a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 2. Inéquations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|2x-6| \leqslant x-1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-1| \leqslant |2x+1|+1$.

Calculs de bornes supérieures et inférieures.

Exercice 3. *Borne supérieure d'une réunion, d'une somme, d'une dilatation*
On considère deux parties non vides et bornées A et B de $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a :

1. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
2. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ où $A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}$.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, que vaut $\sup(\lambda A)$, où $\lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}$?

Exercice 4. *Bornes supérieures et inférieures explicites*
Calculer explicitement les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants, ou démontrer que ces bornes n'existent pas lorsque c'est le cas.

$$A = \left\{ \frac{4n+5}{2n+3}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad C = \left\{ \cos^2(x) + \cos(x)\,,\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$D = \left\{ \Big(x_1 + \ldots + x_n\Big) \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right),\ x_1, \ldots, x_n > 0 \right\} \text{ où } n \geqslant 2 \ (n \in \mathbb{N}) \text{ est fixé.}$$

Partie entière

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est impaire.
Une façon de faire : on pourra simplifier $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(2kx)$ converge-t-elle ?

$\boxed{1/1}$ On a $x \in [-3, 3]$ et $y \in]-4, 2[$

$x + y \in]-7, 5[$

$0 \leqslant x + y \leqslant 5$ ou $-7 \leqslant x+y \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant (x+y)^2 \leqslant 49$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \in [0, 49]$

$\boxed{1/2}$ $0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow 2ab \leqslant a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ $(*)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow 0 \leqslant (a+b)^2$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow -2ab \leqslant a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow -ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ $(**)$

On a $(*)$ et $(**)$ donc $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$

EX^{M} R

$\boxed{2/1}$ $|2x-6| \leq x-1$

$$\begin{cases} 2x-6 \leq 0 \iff |2x-6| = -2x+6 \\ 2x-6 \geq 0 \iff |2x-6| = 2x-6 \end{cases}$$

$$|2x-6| \leq x-1$$

$$\iff \begin{cases} -2x+6 \leq x-1 \\ 2x-6 \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x-6 \leq x-1 \\ 2x-6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq \frac{7}{3} \\ x \leq 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\iff x \in \left[\frac{7}{3}, 3\right] \cup [3, 5]$$

$$\iff x \in \left[\frac{7}{3}, 5\right]$$

$\boxed{2/2}$

$$|x-1| \leq |2x+1|+1 \iff |x-1|-|2x+1| \leq 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$ 0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$ 0	$x-1$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	0	$2x+1$	$2x+1$
$-\lvert 2x+1\rvert$	$x+2$		$-3x$	$-x-2$

$$|x-1|-|2x+1| = \begin{cases} x+2 & \text{sur } \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[& (*) \\ -3x & \text{sur } \left]-\frac{1}{2}, 1\right[& (**) \\ -x-2 & \text{sur }]1, +\infty[& (***) \end{cases}$$

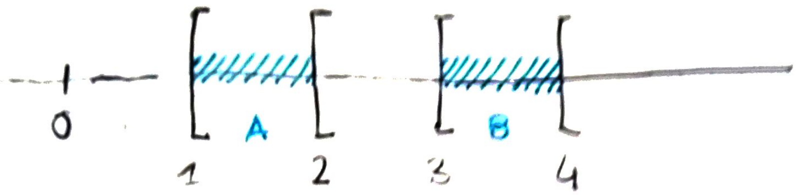
$(*)$ $x \leq -1$ ie $x \in]-\infty, -1]$

(**) $x \geqslant -\frac{1}{3}$ ie $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

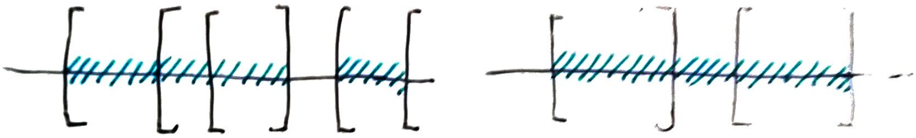
(***) $x \geqslant -3$ ie $x \in [1, +\infty[$

L'éq équivaut à $x \in]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$

$\boxed{3/1}$ un exemple



$$\begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \; A\cup B \begin{matrix} = 4 = \max\{\sup A, \sup B\} \\ = 1 = \min\{\sup A, \sup B\} \end{matrix}$$



Meth 1 On revient à la déf. du sup

$$\begin{cases} S_A := \sup A \\ S_B := \sup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \forall a \in A, \; a \leqslant S_A & (*_A) \\ \forall M \in \{\text{majos } A\}, \; S_A \leqslant M & (**_A) \end{cases} \\ \begin{cases} \forall b \in B, \; b \leqslant S_B & (*_B) \\ \forall M \in \{\text{majos } B\} \; S_B \leqslant M & (**_B) \end{cases} \end{cases}$$

$$S := \max\{S_A, S_B\}$$

Mq $S = \sup(A \cup B)$

ie $\begin{cases} \forall x \in A\cup B, \; x \leqslant S & (*) \\ \forall M \in \{\text{majos } A\cup B\}, \; S \leqslant M & (**) \end{cases}$

Mq $(*)$. Soit $x \in A \cup B$.

1^er cas ($x \in A$):

$$(*_A) \Rightarrow x \leq S_A \leq \underbrace{\max\{S_A, S_B\}}_{S}$$

$$\Rightarrow x \leq S$$

2^e cas ($x \in B$):

$$(*_B'') \Rightarrow x \leq S_B \leq \underbrace{\max\{S_A, S_B\}}_{S}$$

Mq $(**)$. Soit $M \in \{\text{majo } A \cup B\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A \cup B, x \leq M.$$

Mq $S \leq M$.

À renommage près, on a $S = S_A$

donc $S_A \geqslant S_B \Rightarrow S_A \in \{\text{majos } B\}$

Or $S_A \in \{\text{majo } A\}$

3/1 suite

Meth 2 par caractérisation "avec des ε" du sup

- s majore $A \cup B$: cf **Meth 1**
- mq $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cup B, s - \varepsilon < x$

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation "avec des ε" de $\sup A$ et $\sup B$

il existe $\begin{cases} a \in A \\ b \in B \end{cases}$ tq $\begin{cases} \sup A - \varepsilon < a \\ \sup B - \varepsilon < b \end{cases}$

On traite deux cas

- si $s = \sup A$, $\quad x := a \in A \subset A \cup B$
- si $s = \sup B$ $\quad x := b \in B \subset A \cup B$

3/2

$$A + B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, \exists (a,b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Notons $s = \sup A + \sup B$. Mq $s = \sup(A+B)$

eg $A = [0, 1]$; $B = [70, 71]$

$$A + B = \left\{a+b, \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 70 \leq b \leq 71 \end{cases}\right\}$$

$$= [70, 72]$$

Meth 1 Avec la définition

s majore $A + B$: On a $\begin{cases} \forall a \in A, & a \leq \sup A \\ \forall b \in B, & b \leq \sup B \end{cases}$

donc $\forall a \in A, \forall b \in B, a + b \leq \sup A + \sup B = \sup(A+B)$

ie $\forall x \in A + B, \; x \leq s$

. Tout majo de $A+B$ est $\geq \sup(A+B)$.

Soit M un majo de $A+B$.

ie tel que $\forall a \in A, \forall b \in B, a+b \leq M$

ie $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq M-b$

ie $\forall b \in B, \forall a \in A, a \leq M-b$

ie $\forall b \in B, M-b \in \{\text{majos } A\}$

donc $\forall b \in B, M-b \geq \sup A$

ie $\forall b \in B, b \leq M - \sup A$

ie $M - \sup A$ majore B

donc $M - \sup A \geq \sup B$

donc $M \geq \underbrace{\sup A + \sup B}_{\sup(A+B)}$

Meth 2 « Avec les ε »

. s majore $A+B$: idem

. Mq $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A+B, s - \varepsilon < x$.

par caractérisation « avec les ε »

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \sup A - \varepsilon < a \qquad (*)$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B, \sup B - \varepsilon < b \qquad (**)$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'ap. $(*)$, il existe $a \in A$, $\sup A - \underbrace{\tfrac{\varepsilon}{2}}_{\in \mathbb{R}} < a$

d'ap $(**)$, il existe $b \in B$, $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b$

Par somme $\sup A + \sup B - \varepsilon < \underbrace{a+b}_{\in A+B}$

EX M ℝ

$\boxed{3/3}$

Mq $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \lambda \inf A & \text{sinon} \end{cases}$

1^er cas ($\lambda = 0$):

$\lambda A = 0A = \{0\}$.

$\sup\{0\} = \inf\{0\} = \max\{0\} = \min\{0\} = 0.$

2^e cas ($\lambda > 0$):

Par la caractérisation avec les ε.

On veut mq

$\begin{cases} \lambda \sup A \text{ majore} & (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \lambda A, \lambda \sup A - \varepsilon < \alpha & (**) \end{cases}$

Mq(*). Soit $\alpha \in \lambda A$. Ainsi il existe $a \in A$ tq $\alpha = \lambda a$.

$\sup A$ majore A donc $a \leq \sup A$

donc $\lambda a \leq \lambda \sup A$

ie $\alpha \leq \lambda \sup A$

Mq (**). Soit $\varepsilon > 0$.

Par caractérisation "avec des ε", $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \sup A - \varepsilon < a$

Particularisons pour $\varepsilon_A = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$ car $\lambda > 0$

il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} < a$ on a $\lambda > 0$ donc

$$\lambda \sup A - \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} < \lambda a$$

$$\text{ie } \lambda \sup A - \varepsilon < \lambda a$$

<u>3^e cas</u> $(\lambda < 0)$:

Avec la définition. On veut mq

$$\begin{cases} \lambda \inf A \text{ majore } A & (*) \\ \forall M \in \text{majos}(\lambda A),\ \lambda \inf A \leq M & (**) \end{cases}$$

(*). Soit $\alpha = \lambda A$. Ainsi il existe $a \in A$ tq $\alpha = \lambda a$

$\inf A$ minore A donc $a \geq \inf A$

On a $\lambda < 0$ donc $\lambda a \leq \lambda \inf A$

ie $\alpha \leq \lambda \inf A$

(**). Soit $M \in \text{majos}(\lambda A)$.

Ainsi, $\forall \alpha \in \lambda A,\ \alpha \leq M$.

$$\inf A = \min(\text{minos } A)$$

ie $\forall m \in \text{minos } A,\ m \leq \inf A$

ie $\forall m \in \text{minos } A,\ \lambda m \geq \lambda \inf A$ (***)

Posons $m = \frac{M}{\lambda}$ car $\lambda \neq 0$. On a $M = \lambda m$.

Mq $m \in \text{minos } A$. Soit $a \in A$. Alors $\lambda a \in \lambda A$
donc $\lambda a \leq M$

ie $\alpha \geqslant \frac{M}{\lambda} = m$ car $\lambda < 0$

Ainsi $m \in$ minos A

D'après (***) on a donc $\lambda m \geq \lambda \inf A$ ie $M \geq \lambda \inf A$

$\boxed{4/A}$ $A := \left\{\frac{4n+5}{2n+3}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{4n+5}{2n+3} = \frac{4n+6-1}{2n+3} = 2 - \frac{1}{2n+3}.$$

$$\frac{1}{2id+3} \in \searrow \Rightarrow 2 - \frac{1}{2n+3} \in \nearrow$$

Notons $u := n \mapsto \frac{4n+5}{2n+3} = 2 - \frac{1}{2n+3}$

$\inf A = \inf u = u_0$ par croissance

$\sup A = \sup u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ d'après le TLM

$= 2$

$\boxed{4/C}$ $C := \left\{\cos(x)^2 + \cos x, x \in \mathbb{R}\right\}$.

Notons $f := (\cos)^2 + \cos$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ come produit et somme de fonction dérivables.

$$\begin{aligned} f' &= -2\cos \cdot \sin - \sin \\ &= -(\sin \circ 2id + \sin) \\ &= -\left(2 \cdot \sin \circ \left(\tfrac{3}{2} id\right) \cdot \cos \circ \tfrac{1}{2} id\right) \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\cos(\frac{1}{2}x)$			$+$		0		$-$		
$\sin(\frac{3}{2}x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	2

$f(0) = 2$; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$; bla bla bla

f est 2π-périodique, donc

$$\begin{cases} \sup C = \sup f = 2 \\ \inf C = \inf f = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\boxed{5}$

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}\,(1+(-1)^k)$$

Pour k impair $(1+(-1)^k)=0$.

donc $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = 2\sum_{k\in 2\mathbb{N}} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k/2}$

Ainsi $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$

$0<(2-\sqrt{3})^n<1$ car $0<2-\sqrt{3}<1$

$(2+\sqrt{3})^n < (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n < 1 + (2+\sqrt{3})^n$

$A := (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

On a $(2+\sqrt{3})^n < A$ et $A-1 \leq (2+\sqrt{3})^n$

donc $A-1 \leq (2+\sqrt{3})^n < A$.

Par unicité de $\lfloor\cdot\rfloor$

$\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = A-1 \in 2\mathbb{N}+1$

$\boxed{6}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Par définition de $\lfloor \cdot \rfloor$,
on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$2kx - 1 < \lfloor 2kx \rfloor \leq 2kx$$

Par some pour k allant de 1 à n

$$\sum_{k=1}^{n} 2kx - 1 < \sum_{k=0}^{n} \lfloor 2kx \rfloor \leq \sum_{k=0}^{n} 2kx$$

$n \in \mathbb{N}^*$ donc $n^2 > 0$ donc :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2kx - 1) < \frac{1}{n^2} \sum \lfloor 2kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 2kx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 2kx\right) - \frac{1}{n} < \quad u_n \quad \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 2kx \quad \text{par linéarité de } \Sigma.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\right) 2x - \frac{1}{n} < \quad u_n \quad \leq \frac{2x}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{2x\, n(n+1)}{2n^2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x(n+1) - 1}{n}}_{\longrightarrow x} < u_n \leq \underbrace{\frac{x(n+1)}{n}}_{\longrightarrow x}$$

d'ap TdG : $u \longrightarrow x$

Topologie

Exercice 7.

Une partie O de $\mathbb{R}$ est appelée **un ouvert** lorsqu'on a $\forall x \in O,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$ et **un fermé** lorsque c'est le complémentaire d'un ouvert (c'est-à-dire, de façon équivalente, lorsque son complémentaire est ouvert).

1. Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
2. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Une intersection infinie d'ouverts est-elle nécessairement un ouvert ?
4. Que dire des fermés ?

Exercice 8.

Si P est une partie dense de $\mathbb{R}$, montrer qu'entre deux réels distincts il existe toujours une infinité d'éléments de P.

Exercice 9. *Intervalles*

On suppose que I et J sont deux intervalles.

1. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
2. Montrer que $I + J = \{i + j,\ (i,j) \in I \times J\}$ est un intervalle.
3. Montrer que $I \cdot J = \{ij,\ (i,j) \in I \times J\}$ est un intervalle.

Pour les questions 2. et 3., on pourra distinguer 100 *cas mais n'en traiter qu'un seul à condition qu'il soit représentatif. Ce n'est pas une blague mais ce n'est pas la seule façon de faire.*

Exercice 10. *Théorème du point fixe de Tarski.*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante (attention, on ne suppose pas que f est continue !).

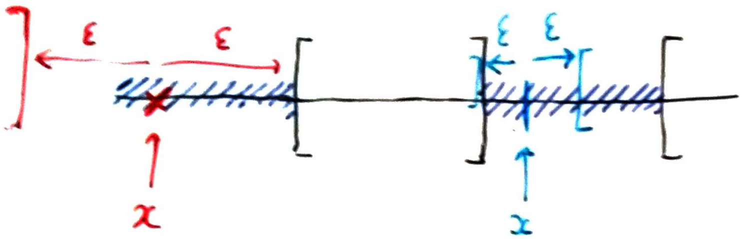
On appelle **point fixe de f** un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

1. Faire un dessin avec une fonction f discontinue (mais convenable).
2. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x\}$ a une borne inférieure α. Compéter votre dessin avec A et α. Montrer que α est un point fixe de f.
3. Montrer que l'ensemble $B = \{x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x\}$ a une borne supérieure β. Compéter votre dessin avec B et β. Montrer que β est un point fixe de f.
4. En déduire que toute application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ a un plus grand et un plus petit points fixes.

Remarque : cet exercice a une généralisation importante en informatique théorique qui est que toute application d'un treillis complet dans lui-même a toujours un plus grand et un plus petit points fixes. Pour en savoir plus, on pourra traiter le DC1.

$\boxed{7}$

e.g. exemple ?



$]-\infty, 0[\cup]1, 2[= U$

Soit $x \in U$

Traitons deux cas

<u>1^{er} cas</u> ($x \in]-\infty, 0[$) :

Posons $\varepsilon = |x| > 0$

Mq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$

Soit $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

Ainsi $x-\varepsilon < a < x+\varepsilon$

ie $x-|x| < a < x+|x|$

ie $-|x|-|x| < a < -|x|+|x|$

ie $-2|x| < a < 0$

donc $a < 0$

ie $a \in]-\infty, 0[\subset U$

On a bien montré $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$

<u>2^e cas</u> ($x \in]1, 2[$) :

Posons $\varepsilon = \min\{|x-1|, |x-2|\} = \min\{x-1, 2-x\}$.

Mq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Soit $b \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

$x-\varepsilon < b < x+\varepsilon$ ie $x - \min\{x-1, 2-x\} < b < x + \min\{x-1, 2-x\}$

Or $x + \min\{x-1, 2-x\} \leq x + 2 - x = 2$

de m̂, $\min\{x-1, 2-x\} \leq x-1$

donc $x - \min\{x-1, 2-x\} \geq x + 1 - x$

donc $1 \leq x - \min\{x-1, 2-x\}$

<u>bilan</u> $1 \leq x - \min\{x-1, 2-x\} < b < x + \min\{x-1, 2-x\} \leq 2$

ie $b \in]1,2[\subset \mathcal{U}$

eg fermé? $F = {}^c\mathcal{U}$

$[0,1] \cup \underbrace{[2,+\infty[}_{\text{fermé}}$

rem $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé

$\emptyset$ aussi

$\boxed{7/1}$ Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts.

Mq $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.

Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Ainsi il existe $i_0 \in I$ tq $x \in O_{i_0}$

donc comme O_{i_0} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O_{i_0}$

Or $O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

d'où $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcup_{i\in I} O_i$

$\boxed{7/2}$ Soit $(O_1, O_2, \dots, O_n)$ une famille finie d'ouverts

Mq $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Soit $x \in O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n$

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x \in O_i$

ie $\begin{cases} x \in O_1 \\ x \in O_2 \\ \vdots \\ x \in O_n \end{cases}$

Comme $O_1, \dots, O_n$ sont ouverts, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tq

$]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset O_1$. il existe $\varepsilon_2 > 0$ tq $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset O_2$...

...

il existe ε_n tq $]x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n[\subset O_n$

Posons $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Mq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$

ie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O_i$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

Ainsi $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \leq \varepsilon_i$

Donc $x - \varepsilon_i \leq x - \varepsilon < a < x + \varepsilon \leq x + \varepsilon_i$

ie $a \in]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[\subset O_i$

On a bien montré $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O_i$

$\boxed{7/3}$ Posons pour $n \geq 1$

$$O_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

O_n est bien ouvert : ok

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \underset{\mathbb{R} \text{ archimédien}}{\overset{\text{ok}}{\underset{\subset}{\overset{\supset}{=}}}} \{0\} \text{ n'est pas ouvert.}$$

ie $\exists x \in \{0\}, \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset \{0\}$

ok

$\boxed{7/4}$ Soit $(F_i)_i$ une famille de fermés.

Soit pour $i \in I$, $O_i = \complement F_i$ O_i est ouvert donc

$\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouverte

donc $\complement\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right)$ est fermé

ie $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé d'ap De Morgan

8 Soit $P \in \mathbb{R}$, P dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation par l'ordre, il existe $z_0 \in P$,

$x < z_0 < y$

$z_0 \in P \Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}$

D'après la caractérisation par l'ordre il existe $z_1 \in P$, $x < z_1 < z_0$

⋮ Par récurrence - IMMÉDIATE -

Il existe une infinité de $z_n \in P$, $x < z_n < y$.

$\boxed{9/1}$ Mq $I \cap J$ est un intervalle. Utilisons la définition unificatrice

Mq $\forall x < y \in I \cap J,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x < z < y \Rightarrow z \in I \cap J$.

Soient $x < y \in I \cap J$. Soit $z \in \mathbb{R}$. Supposons $x < z < y$.
Montrons $z \in I \cap J$. ie $z \in I$ et $z \in J$

On a $x, y \in I$ et $x, y \in J$ par définition de $\cap$

et I, J sont des intervalles

et $x < z < y$

Donc $z \in I$ et $z \in J$

ie $z \in I \cap J$ ie $I \cap J$ est un intervalle.

$\boxed{9/2}$ Mq $I + J$ est un intervalle en montrant qu'il est convexe, ie

$\forall a, b \in I+J,\ [a, b] \subset I + J$ ie $\forall a, b \in I+J,\ \forall t \in [0, 1],\ (1-t)a + tb \in I + J$

Soient $a, b \in I+J$ et $t \in [0, 1]$. Mq $(1-t)a + tb \in I + J$
$a \in I + J$ ainsi il existe $i, j \in I \times J,\ a = i + j$
$b \in I + J$ ainsi il existe $i', j' \in I \times J,\ b = i' + j'$

$$
\begin{aligned}
(1-t)a + tb &= (1-t)(i+j) + t(i'+j') \\
&= (1-t)i + (1-t)j + ti' + tj' \\
&= \underbrace{(1-t)i + ti'}_{\in I} + \underbrace{(1-t)j + tj'}_{\in J} \\
&\in I + J
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}$

Corrigé du dernier exercice

Exercice 10. *Théorème du point fixe de Tarski.*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante.

2. Montrer que $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x\}$ a une borne inférieure α. Montrer que α est un point fixe de f.

   On a : $\begin{cases} A \subset \mathbb{R} \text{ car } A \subset [0,1] \text{ par définition}\,; \\ A \text{ est minorée car } A \subset [0,1] \text{ par définition, donc } 0 \text{ minore } A\,; \\ A \text{ est non vide car } f(1) \in [0,1] \text{ donc } f(1) \leqslant 1 \textit{ i. e. } 1 \in A. \end{cases}$.
   D'après la propriété de la borne inférieure, A a une borne inférieure α.

   Montrons que α est un point fixe de f. Pour commencer il faut que α soit bien dans le domaine de définition $[0,1]$ de f. C'est immédiat : 0 minore A et α est le plus grand des minorants de A, donc on a $0 \leqslant \alpha$. De même, 1 appartient à A et α est un minorant de A donc on a $\alpha \leqslant 1$. Reste à voir qu'on a $f(\alpha) = \alpha$ et on va procéder par antisymétrie.

   On sait que α minore A donc pour tout x dans A on a $\alpha \leqslant x$. Utilisons l'hypothèse : f est croissante. Donc pour tout x dans A, $f(\alpha) \leqslant f(x)$. Mais par définition, pour tout x dans A, on a $f(x) \leqslant x$. Donc par transitivité, pour tout x dans A on a $f(\alpha) \leqslant x$. Autrement dit $f(\alpha)$ est un minorant de A aussi.
   Mais comme α est le plus grand des minorants de A, on a $\boxed{f(\alpha) \leqslant \alpha}$.

   Puis par croissance on a : $f(f(\alpha)) \leqslant f(\alpha)$ et donc $f(\alpha) \in A$, et comme α minore A on en déduit $\boxed{\alpha <= f(\alpha)}$.
   Remarquez que j'ai écrit une ligne et que c'est ici que Meignan utilise les ε ce qui lui en prend quatre ou cinq.

   Par antisymétrie comme promis : $f(\alpha) = \alpha$, autrement dit α est un point fixe de f.

3. Montrer que $B = \{x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x\}$ a une borne supérieure β. Montrer que β est un point fixe de f.

   Pareil. Je rédige un peu différemment (mieux ?) :

   a. On veut montrer que $B = \{x \in [0,1],\ \ x \leqslant f(x)\}$ a une borne supérieure β.
      - Par définition, on a $f(0) \in [0,1]$ et donc $f(0) \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \in B$. B est donc non vide.
      - De plus, on a $B \subset [0,1]$ par définition. En particulier 1 majore B.
      - B est une partie non vide est majorée de $\mathbb{R}$, elle a donc une borne supérieure β.

   b. Montrons qu'on a bien $\beta \in [0,1]$.
      - On a vu que 1 majore B et β est le plus petit des majorants de B, donc $\beta \leqslant 1$.
      - On a vu que 0 appartient à B et β est un majorants d B, donc $\beta \geqslant 0$.

   c. Montrons que $f(\beta)$ est un majorant de B.
      Soit $x \in A$.
      - Par définition de B, on a donc $x \leqslant f(x)$.
      - α étant la borne supérieure de B, c'est en particulier un majorant de A, on a donc $x \leqslant \alpha$.
      - Par croissance de f, on a donc $f(x) \leqslant f(\beta)$.
      - Par transitivité, on a finalement $x \leqslant f(\beta)$.

      Ceci étant vrai pour tout élément x de B, on a bien montré que $f(\beta)$ majore B.

   d. Montrons qu'on a $\alpha \leqslant f(\beta)$.
      β est la borne supérieure, c'est-à-dire le plus petit des majorants de B. En particulier, β est plus petit que $f(\beta)$ puisqu'on a vu que $f(\beta)$ est un majorant de B.

   e. On vient de voir qu'on a $\beta \leqslant f(\beta)$. Par croissance de f on a donc $f(\beta) \leqslant f(f(\beta))$ c'est-à-dire $f(\beta) \in B$. Et du coup, β étant un majorant de B, et $f(\beta)$ un élément de A, on a évidemment $f(\beta) \leqslant \beta$.

   f. On a vu qu'on avait $\beta \leqslant f(\beta)$ et $f(\beta) \leqslant \beta$: par antisymétrie, on a donc $f(\beta) = \beta$, c'est-à-dire que $\underline{\beta \text{ est un point fixe de } f}$

4. En déduire que toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ a un plus grand et un plus petit points fixes.

   Montrons que α est le plus petit point fixe et β le plus grand point fixe de f.

   On a déjà vu que c'étaient des points fixes.

   Soit γ un point fixe.

   On a $f(\gamma) = \gamma$ donc en particulier $f(\gamma) \leqslant \gamma$ et donc $\gamma \in A$ et donc $\alpha \leqslant \gamma$ puisque α minore A.

   On a $f(\gamma) = \gamma$ donc en particulier $f(\gamma) \geqslant \gamma$ et donc $\gamma \in B$ et donc $\beta \geqslant \gamma$ puisque β majore B.

   D'où le résultat.