$\mathbb{R}$

motivatn Il existe des qtes géométriques non rationnelles

solutn On "rajoute les bornes supérieures" on prolonge canoniquement $+, \times, \leq$

coût $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ("il y a beaucoup plus de réels que de rationnels")

I Borne supérieure et applications

1 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

def *théorème admis*

Il existe un ensemble $\mathbb{R}$ muni d'opérations $+, \times$ et d'un ordre $\leq$ tel que

1 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $+, \times, \leq$ prolongeant les opérations homonymes sur $\mathbb{Q}$

2 $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un groupe commutatif

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x a un symétrique pour $\times$: $\frac{1}{x}$

3 $\leq$ compatible à la structure de corps de $\mathbb{R}$

On peut sommer et multiplier par un positif une inégalité

4 $\mathbb{R}$ vérifie la ppté de la borne supérieure

Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ a une borne sup dans $\mathbb{R}$ (plus petit des majo)

2 Applications immédiates

thm propriété de la borne inf

Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ a une inf dans $\mathbb{R}$

dem Soit $A \subset \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} A \neq \emptyset & (*) \\ A \text{ minorée} & (**) \end{cases}$

Meth 1 Notons B l'ensemble des minorants de A

On a $\begin{cases} B \neq \emptyset & \text{d'après } (**) \\ B \text{ majorée d'après } (*) \end{cases}$

D'après la ppte de la borne sup, B a une borne supérieure b

Mq $b \in B$ par l'absurde. Supp $b \notin B$

Ainsi: b n'est pas un minorant de A

Donc il existe $a \in A$ tq $b > a$.

Soit $\beta \in B$ ie β est un minorant de A

ie $\forall x \in A, \ \beta \leq x$

En particulier $\beta \leq a$

Donc a majore B

Donc $b \leq a$ imp

Ainsi $\begin{cases} b \in B \\ b = \sup B \end{cases}$ donc $b = \max B$

donc $b = \inf A$

Meth 2 Notons $B = -A$

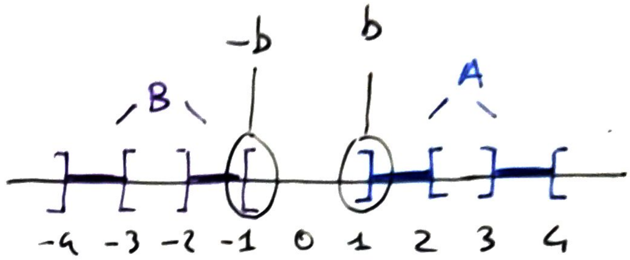
On a $\begin{cases} B \neq \emptyset & \text{car } A \neq \emptyset \ ((*)) \\ B \text{ majorée} & \text{car } A \text{ minorée} \ ((**)) \end{cases}$

En effet $A \neq \emptyset$ donc il existe $a_0 \in A$ et on a donc $-a_0 \in B$
De même A est minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A, m \leq a$

donc $\forall a \in A, -m \geq -a$

ie $\forall b \in B, -m \geq b$

donc $-m$ minore B



Montrons que $-b = \inf A$

ie $-b$ est le plus grand des minorants de A

- C'est un minorant car b est un majorant de B

ie $\forall y \in B, \quad y \leq b$

ie $\forall x \in A, \ -x \leq b$

ie $\forall x \in A, \ x \geq -b$

ie $-b$ minore A

- C'est le plus grand des minorants de A car b est le plus petit des majorants de B

Soit m un minorant de A
Alors $-m$ est un majorant de B
donc $-m \geq b$
donc $m \leq -b$

D'où $b = \sup A$

thm caractérisation des sup avec ε
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a \end{cases}$$

<u>dem</u>

$\Rightarrow$: Supp $s = \sup A$

ie $\begin{cases} s \text{ majore } A \\ \forall M \in \{\text{majos de } A\}, \ s \leq M \end{cases}$

Mq $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$

par contraposition c'est mieux askip

Soit $\varepsilon > 0$.

$\begin{cases} s - \varepsilon < s \\ s = \min \{\text{majos de } A\} \end{cases} \Rightarrow s - \varepsilon \notin \{\text{majos de } A\}$

Autrement dit $s - \varepsilon$ n'est pas un majo de A :

$\neg(\forall a \in A, a \leq s - \varepsilon)$ ie $\exists a \in A, a > s - \varepsilon$

$\Leftarrow$: Supp $\begin{cases} s \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a \end{cases}$. Mq $s = \sup A$

ie $\begin{cases} s \text{ majore } A & \text{(par hypothèse)} \\ \forall M \in \{\text{majos de } A\}, \ s \leq M \end{cases}$

Soit M un majo de A. Mq $s \leq M$ par l'absurde Supp $s > M$.

$\varepsilon := s - M$. On a bien $\varepsilon > 0$.

$\begin{cases} \text{Par hypothèse, il existe } a \in A \text{ tq } s - \varepsilon < a \\ M = s - \varepsilon \end{cases}$ Imp (M majore A)

y'a la même avec les bornes inf

3 Applications aux suites

thm TLM ie théorème sur les limites des suites monotones

1 Toute suite croissante et majorée converge vers son sup

$$\forall u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, u \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \wedge u \text{ majorée} \Rightarrow u \xrightarrow[+\infty]{} \sup u$$

2 Toute suite décroissante et minorée converge vers son inf

$$\forall u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, u \in \searrow(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \wedge u \text{ minorée} \Rightarrow u \xrightarrow[+\infty]{} \inf u$$

rpl La borne supérieure (resp. inférieure) d'une suite est le sup (resp. inf) de l'ensemble de ses valeurs

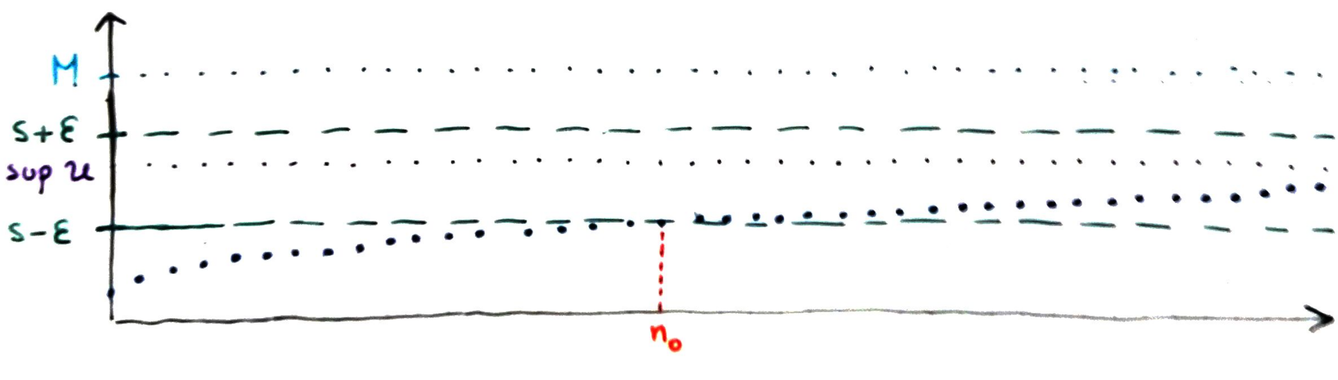
$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \sup u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \\ \inf u = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

rpl une suite u converge vers ℓ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

dem

1 Soit $u \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ une suite majorée



Notons $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et mq $u_n \to s$

Soit $\varepsilon > 0$

D'après la caractérisation "avec des ε" des bornes sup,
il existe $a \in \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ tq $s - \varepsilon < a$.
Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a = u_{n_0}$
Soit $n \geq n_0$

- Par croissance de u, $u_n \geq u_{n_0} > s - \varepsilon$
- $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ donc $u_n \leq s < s + \varepsilon$

Ainsi: $s - \varepsilon < u_n < s + \varepsilon$

Ainsi: u converge vers s

2 par raisonnement analogue :p

thm TLM_∞

Toute suite monotone[1] a une limite ($\in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$)

rpl

1 $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$

2 $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$

dem

1 Mq toute suite croissante non-majorée a pour limite $+\infty$

Soit $u \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ non-majorée, ie $\neg(\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M)$

ie $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$ $(*)$

---

[1] ie $\forall u \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \cup \searrow(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Soit $A \in \mathbb{R}$ D'après (*), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} > A$
Soit $n \geq n_0$
Par croissance de u : $u_n \geq u_{n_0} > A$
donc $u_n > A$

II Partie entière - applications

1 Partie entière

thm-def

Soit $x \in \mathbb{R}$
Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$
On l'appelle partie entière par défaut de x et on la note
$n = \lfloor x \rfloor$

remq

1 Les inégalités $n \boxed{\leqslant} x \leqslant n+1$
se réécrivent de façon équivalentes

$$x-1 < n \boxed{\leqslant} x$$

2 On définit de même la partie entière par excès de x
comme l'unique entier n tel que

$$n-1 < x \leqslant n$$

$$\Leftrightarrow x \leq n < x+1$$

On note $\lceil x \rceil := n$

eg

$\lfloor \pi \rfloor = 3$ engineers be like $\lfloor \pi \rfloor = \pi$ $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$

$\lceil \pi \rceil = 4$ $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$

remq $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$

dem Traitons le cas $x \geq 0$

Notons $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x\}$.

$\begin{cases} A \neq \emptyset \text{ (car } 0 \in A) \\ A \text{ majée par } x \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$ D'après la ppté de la borne sup A a une borne sup $s := \sup A$.

On a $s-1 < s$

donc $s-1$ n'est pas un majorant de A

donc il existe un élément $n_0 \in A$ tq $s-1 < n_0$

ie $s < n_0 + 1$

Ainsi $\begin{cases} A \text{ est majorée par } n_0+1 \\ A \neq \emptyset \end{cases}$

D'après la variante du bon ordre A a un plus grand elt, notons-le $n_1 := \max A$

On a $\begin{cases} n_1 \in A \text{ donc } n_1 \leq x & \text{par définition} \\ n_1 + 1 \notin A \text{ donc } x < n_1 + 1 \end{cases}$

d'où l'existance.

<u>Unicité</u> Soient n_1, n_2 tq $\begin{cases} n_1 = \lfloor x \rfloor \\ n_2 = \lfloor x \rfloor \end{cases}$. On a

$$n_1 \leq x < n_1 + 1 \qquad (*)$$

$$n_2 \leq x < n_2 + 1 \qquad (**)$$

$$\cdot -1 \quad -n_2 - 1 < -x \leq -n_2 \qquad (***)$$

$$n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1 \qquad (*)+(***)$$

ie $$-1 < \underbrace{n_1 - n_2}_{\in \mathbb{Z}} < 1$$

donc $n_1 - n_2 = 0 \Leftrightarrow n_1 = n_2$

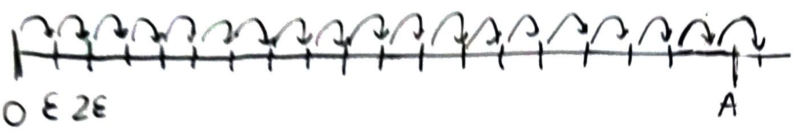
remq

C'est analogue pour $x<0$, on pose $A = \{n \in \mathbb{N},\ -x > n\}$

2 Caractère Archimedien de $\mathbb{R}$

prop d'Archimède

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{aussi petit soit-il}}\ \underbrace{\forall A > 0}_{\text{aussi grand soit-il}},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > A$$



dem

Posons $n := \lfloor \frac{A}{\varepsilon} \rfloor + 1$

On a
$$\frac{A}{\varepsilon} - 1 < \left\lfloor \frac{A}{\varepsilon} \right\rfloor \leq \frac{A}{\varepsilon} \quad +1$$
$$\Leftrightarrow \frac{A}{\varepsilon} < n \leq \frac{A}{\varepsilon} + 1 \quad \cdot \varepsilon \text{ car } \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow A < n\varepsilon \leq A + \varepsilon$$

3 Approximations décimales

eg $\pi \approx 3,1415926$

$3,1415926$ est une approximation décimale de π à 10^{-7} près

ie $|\pi - 3,1415926| \leq 10^{-7}$

def

On appelle nombre décimal un nombre de la forme $\frac{m}{10^k}$

avec $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux remq

$\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$

eg $1/3 \notin \mathbb{D}$

Supp $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ ie $\overset{\text{def}}{\exists} (m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

tq $\frac{1}{3} = \frac{m}{10^k} \Leftrightarrow 3m = 10^k \cdot 1$

or $3 \wedge 10 = 1$ ainsi $3 \wedge 10^k = 1$ d'après le coroll de Bézout

$\begin{cases} 3m = 10^k \cdot 1 \\ 3 \wedge 10^k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid 10^k \cdot 1 \\ 3 \wedge 10^k = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid 1$ d'après Gauss IMB

thm-def Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $\exists!\, d \in \mathbb{D},\ d \leq x < d + \frac{1}{10^n}$

d s'appelle l'approx décimale de x par défaut à 10^{-n} près

eg

$3{,}1415926$ est l'approximation décimale par défaut à 10^{-7} près de π :
$3{,}1415926 = \frac{\lfloor 10^7 \pi \rfloor}{10^7}$

dem

d convient $\Leftrightarrow d \leq x < d + \frac{1}{10^n}$

$\Leftrightarrow 10^n d \leq 10^n x < 10^n d + 1$

$\Leftrightarrow 10^n d = \lfloor 10^n x \rfloor$

$\Leftrightarrow d = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$

III Topologie de $\mathbb{R}$

1 Intervalle et convexité

clef

On appelle <u>intervalle</u> une partie de $\mathbb{R}$ de l'une des 10 formes suivantes :
Soit $a \leq b$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ $\quad\quad$ $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ $\quad\quad$ $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ $\quad\quad$ $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, b \geq x\}$

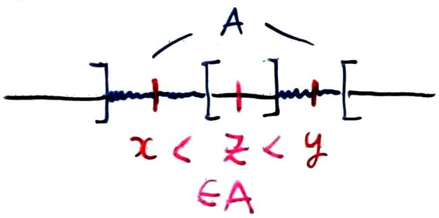
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ $\quad\quad$ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, b > x\}$

$\emptyset = \{\}$ $\quad\quad$ $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

objectif Trouver une définition unificatrice.

idée Un intervalle est une partie "en un seul morceau"

ie pas un intervalle :



thm caractérisation des intervalles
Soit $I \in \mathbb{R}$
I est un intervalle $\Leftrightarrow (\forall x < y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in I)$

dem
$\Rightarrow$: Supp I un intervalle
- Traitons le cas $I = \emptyset$. Alors $\forall x < y \in \emptyset, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in I$

• Traitons le cas $I = [a, b[$

Soit $x < y \in I$.

Ainsi $a \leq x < b$ et $a \leq y < b$

Soit $z \in \mathbb{R}$ tq $x < z < y$

On a donc $a \leq x$ et $x < z$ donc $a \leq z$
par T de

De même $z < y$ et $y < b$ donc $z < b$ par T

d'où $a \leq z < b$ donc $z \in I$

• Les 8 cas restants se traitent de même, il suffit d'utiliser la T

$\Rightarrow$: Supp $\forall x < y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in I$.

Traitons plusieurs cas.

1er cas ($I = \emptyset$):
Alors I est un intervalle

2e cas ($I \neq \emptyset$ et I majé et $\neg$(I minoré)):

I a donc une borne supérieure b.

Mq $\begin{cases} b \in I \Rightarrow I =]-\infty, b] \\ b \notin I \Rightarrow I =]-\infty, b[\end{cases}$

Supp $b \in I$.

On a b majore I donc $I \subset]-\infty, b[$ (ie ∀ les elt de I sont $\leq b$)
Soit $x \in]-\infty, b]$.
Si $x = b$ alors $x \in I$
Si $x < b$ comme I non minorée, il existe $i \in I$ tq $i < x$

$\underbrace{i}_{\in I} < x < \underbrace{b}_{\in I} \Rightarrow x \in I$ par hypothèse d'où $]-\infty, b] \subset I$

<u>Supposons $b \notin I$</u>

b majore I donc $I \subset]-\infty, b]$ et $b \notin I$ donc $I \subset]-\infty, b[$

Soit $x \in]-\infty, b[$
On a $x < b$ qui est le min des majo de I donc x n'est pas un majo de I

Il existe $\beta \in I$ tel que $x < \beta$
De plus I n'est pas minorée il existe $\alpha \in I$ tel que $\alpha < x$
On a $\underbrace{\alpha}_{\in I} < x < \underbrace{\beta}_{\in I}$, donc par hypothèse $x \in I$.
On a donc $]-\infty, b[\subset I$

<u>3^e cas</u> ($I \neq \emptyset$ et $\neg$majoré et minoré): idem

<u>4^e cas</u> ($I \neq \emptyset$ et $\underbrace{(\text{majoré et minoré})}_{\Leftrightarrow \text{ borné}}$):

D'après la ppté de la borne sup, il existe $b := \sup I$
D'après la ppté de la borne inf, il existe $a := \sup I$

Supposons $a \in I$ et $b \in I$
a majore I et b minore I donc $I \subset [a, b]$
Soit $x \in [a, b]$ si $x \in \{a, b\}$ alors $x \in I$
Sinon $\underbrace{a}_{\in I} < x < \underbrace{b}_{\in I}$ donc par hypothèse $x \in I$

Supposons $a \notin I$ et $b \in I$

- a minore I et b majore I donc $I \subset [a, b]$
  et $a \notin I$ donc $I \subset]a, b]$

- Soit $x \in]a, b]$
  Si $x = b$ alors $x \in I$
  Sinon $x > a = \inf I$ (donc > du max des mino)
  donc x n'est pas minorant donc il existe $\mu \in I$ tel que $\mu < x$
  $\underbrace{\mu}_{\in I} < x < \underbrace{b}_{\in I}$ donc par hypothèse $x \in I$.
  D'où $]a, b] \subset I$

Supposons $a \in I$ et $b \notin I$: idem

Supposons $a \notin I$ et $b \notin I$:

- a minore I et b majore I donc $I \subset [a, b]$
  et $a \in I$ et $b \notin I$ donc $I \subset]a, b[$

- Soit $x \in]a, b[$.
  On a $x > a = \inf I$ donc x n'est pas un minorant de I
  donc il existe $\alpha \in I$ tel que $x > \alpha$
  On a $x < b = \sup I$ donc x n'est pas un majorant de I
  donc il existe $\beta \in I$ tel que $x < \beta$
  $\underbrace{\alpha}_{\in I} < x < \underbrace{\beta}_{\in I}$ donc par hypothèse $x \in I$

5e cas ($I \neq \emptyset$, $\neg$ majorée et $\neg$ minorée) :

Montrons $I = \mathbb{R}$

- $I \subset \mathbb{R}$ car $I \in P(\mathbb{R})$ par hypothèse

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

I n'est pas majoré donc x ne majore pas I
donc il existe $\beta \in I$ tel que $x < \beta$

I n'est pas minoré donc x ne minore pas I
donc il existe $\alpha \in I$ tel que $x > \alpha$

$\underbrace{\alpha}_{\in I} < x < \underbrace{\beta}_{\in I}$ donc par hypothèse $x \in I$.

d'où $\mathbb{R} \subset I$ ☺

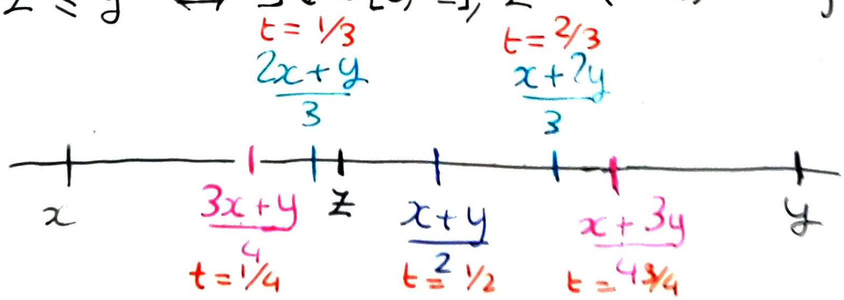
mission passed On a une définition unificatrice

objectif #2 Trouver une définition unificatrice qui n'utilise pas ou de façon moins fondamentale la relation d'ordre (pour généraliser à $\mathbb{C}$)

remq

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. et $x \leq y$.

$$x \leq z \leq y \iff \exists t \in [0, 1],\ z = (1-t)x + ty$$



def

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

On appelle **segment $[a,b]$** l'ensemble $[a,b] = \{(t-1)a + tb,\ t \in [0,1]\}$

remq pour $a \leq b$ on trouve bien $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$

remq

Cette définition a l'avantage de pouvoir se généraliser à d'autres espaces vectoriels de $\mathbb{R}$

def

On appelle **convexe de $\mathbb{R}$** une partie de $\mathbb{R}$ C tellque

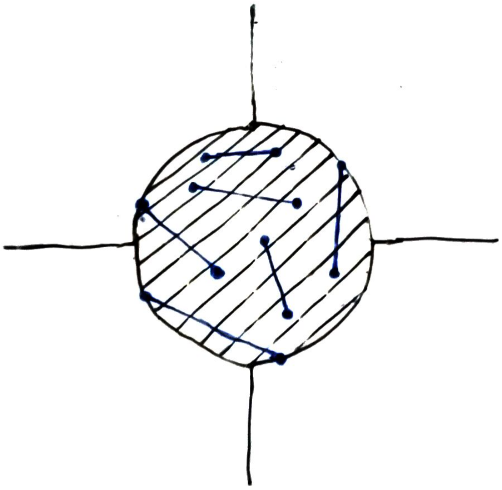
$$\forall a,b \in C,\ [a,b] \subset C$$

remq

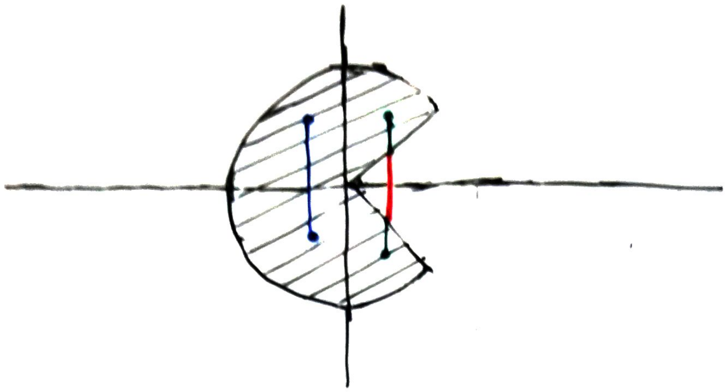
1 Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont exactement les intervalles

2 On peut généraliser la notion à d'autres espaces vectoriels

eg un disque est convexe dans $\mathbb{C}$



c-exemple pacman n'est pas convexe



og d'intérêt EX $\underline{M}$ $\mathbb{R}$ #9

Permet de ne pas traiter 10^2 cas.

2 Densité

idée

"D est dense dans $\mathbb{R}$" signifie que l'on peut approcher tout reël aussi précisément que voulu par un élément de D

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D, |x-d| < \varepsilon$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D, d \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, D \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$

eg

- $\{1\}$ n'est pas dense
- $\forall p \in P(\mathbb{R}), \# p \in \mathbb{N}$ n'est pas dense
- $\mathbb{Z}$ n'est pas dense

$\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \mathbb{Z} \cap]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$

Posons $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \varepsilon = \frac{1}{10} \end{cases}$. On a $\mathbb{Z} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \mathbb{Z} \cap]\frac{4}{10}, \frac{6}{10}[= \emptyset$

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

Traitons deux cas.

1er cas $(x \notin \mathbb{Z})$:

Posons $d = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

On a bien $|x-d| = 0 < \varepsilon$

2e cas $(x \in \mathbb{Z})$:

Traitons deux CYKA.

1er CYKA $(\varepsilon \notin 2\mathbb{N}^*)$

Posons $d = x + \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car $\varepsilon \notin 2\mathbb{N}^*$

$|x-d| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2e CYKA $(\varepsilon \in 2\mathbb{N}^*)$

Posons $d := x + \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$|x - d| = \frac{1}{2} < \varepsilon$ car $\varepsilon \in 2\mathbb{N}^*$

objectif

Mq $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

remq

D dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, D \cap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\neq \emptyset$

dem

$\Rightarrow$: En particulier, $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$\Leftarrow$: Par caractère archimédien de $\mathbb{R}$!
On supp $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, D \cap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\neq \emptyset$
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Par caractère Archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > 1$
ie $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\begin{cases} D \cap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\neq \emptyset \\ \frac{1}{x} < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow D \cap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\subset D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$
$$\Rightarrow D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset$$

thm caractérisation par l'ordre

D dense dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \forall a < b \in \mathbb{R}, \exists d \in D, a < d < b$

dem

$\Rightarrow$: Supp D dense dans $\mathbb{R}$ ie $\forall X \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D \cap]X - \varepsilon, X + \varepsilon[\neq \emptyset$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Pour $\begin{cases} X = \frac{a+b}{2} \\ \varepsilon = \left|\frac{a-b}{2}\right| > 0 \end{cases}$ On a $\begin{cases} a = X - \varepsilon \\ b = X + \varepsilon \end{cases}$ La définition de la densité donne

qu'il existe $\delta \in D$ tq $d \in]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$ ie $\delta \in D \cap]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$

ie $\delta \in D$ et $a = X - \varepsilon < \delta < X + \varepsilon = b$
Posons $d = \delta$
On a bien $d \in D$ et $a < d < b$

$\Leftarrow$: Supp $\forall a < b, \exists d \in D, a < d < b$ $(*)$
Soit $X \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

Pour $\begin{cases} a = X - \varepsilon \\ b = X + \varepsilon \end{cases}$ $(*)$ donne qu'il existe $d \in D$ tq $X - \varepsilon = a < d < b = X + \varepsilon$

Posons $\delta = d$. On a bien $d \in D \cap]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$

thm caractérisation séquentielle de la densité

D dense dans $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists u \in D^{\mathbb{N}}, u \xrightarrow[\infty]{} x$

dem

$\Leftarrow$: Supp $\forall x \in \mathbb{R} \exists u \in D^{\mathbb{N}}, u \xrightarrow[\infty]{} x$ $(*)$
Soient $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$
D'après $(*)$ il existe une suite $u \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u \xrightarrow[\infty]{} x$

ie $\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x - \eta < u_n < x + \eta$

Pour $\eta = \varepsilon$, on obtient $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq n_0, \; x - \varepsilon < u_n < x + \varepsilon$

En particulier, $u_{n_0} \in D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$

$\Rightarrow$: Supp D dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$
Par densité, $\forall \varepsilon > 0, \exists d \in D \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$

thm

1 $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

2 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

3 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

dem

1 On utilise la caractérisation séquentielle
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On pose $u \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales par défaut de x.

$$u = n \mapsto \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

eg

$$u_1 = 3 = \lfloor \pi \rfloor$$
$$u_2 = 3,1 = \frac{\lfloor 10\pi \rfloor}{10}$$
$$u_3 = 3,14 = \frac{\lfloor 100\pi \rfloor}{100}$$
$$\vdots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x - \frac{1}{10^n}}_{\longrightarrow x} < u_n \leq \underbrace{x}_{\longrightarrow x}$$

D'après le TdG, $u_n \longrightarrow x$

2 $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite u définie en 1 est à valeurs dans $\mathbb{D}$ donc dans $\mathbb{Q}$, et elle converge vers x

3 On utilise la caractérisation séquentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Traitons deux cas.

1er cas ($x \in \mathbb{Q}$):

On pose $u := n \mapsto x + \frac{\sqrt{2}}{10^n}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{10^n} \in \mathbb{Q}^*$ donc $\frac{\sqrt{2}}{10^n} \notin \mathbb{Q}$

donc $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{10^n}\right)_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$u \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $u \xrightarrow[\infty]{} x$

2e cas ($x \notin \mathbb{Q}$):

On pose $u := n \mapsto x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $u \xrightarrow[\infty]{} x$ par continuité de $n \mapsto x$ lol

rem

On a même montré que pour tout il existe une suite croissante de limite x.

De même, $n \mapsto \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite x.

3 Droite réelle achevée

<u>def</u>

On appelle droite rélle achevée l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$
$$= [-\infty, +\infty]$$

où $-\infty$ et $+\infty$ sont des symboles

<u>def</u>

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ se prolonge naturellement à $\overline{\mathbb{R}}$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$

- $a \leq b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ssi $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$
- $a, b < +\infty$
- $-\infty < a, b$
- $-\infty < +\infty$

<u>remq</u>

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie a une borne sup et une borne inf

<u>eg</u>

- $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R} = +\infty$
- $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R} = -\infty$
- $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} \emptyset = -\infty$
- $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} \emptyset = +\infty$

<u>app</u>

Pour $P := a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. $\deg P = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \{ n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0 \}$

On a bien $\deg(0) = -\infty$ ☺

def

Les opérations $(+, -, \times, \div)$ sur $\mathbb{R}$ se prolonge naturellement mais partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$

eg

- Pour $a \in \mathbb{R}$, $a + (\pm\infty) = \pm\infty$
  $a - (\pm\infty) = \mp\infty$

  Mais $+\infty + (-\infty)$ n'est pas défini

- Pour $a \in \mathbb{R}$, $a \times (+\infty) = \mathrm{sgn}(a)\infty$

Mais $0 \times (+\infty)$ n'est pas défini

$\square$

very trist
much sad :(