$\mathbb{Q}$

Arithmétique dans $\mathbb{Q}$

Exercice 1.

Résoudre $\sqrt{\dfrac{n+15}{n+1}} \in \mathbb{Q}$, d'inconnue $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Racines évidentes*

1. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire (= de coefficient dominant égal à 1) de degré n à coefficients entiers.
   Montrer que, si $P(X)$ a une racine rationnelle, alors cette racine est entière.
2. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de degré n tel que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que si p/q (écriture irréductible) est une racine rationnelle de $P(X)$, alors $p|a_0$ et $q|a_n$.
3. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire à coefficients entiers. En combinant les deux questions précédentes, que dire d'une éventuelle racine rationnelle de P ?

C'est ce qu'on appelle une "racine évidente" d'un polynôme à coefficients entiers.

On précise donc ici un résultat vu en TACMAS sans démonstration.

Rationnels vs réels.

Exercice 3. *CNS d'irrationnalité du collège.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $x = \overline{x_0x_1\cdots x_d, x_{d+1}x_{d+2}\cdots x_n\cdots}^{10}$ le développement en base 10 de x.

Montrer que x est rationnel si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Indication pour le sens direct : vérifier que, à partir de x_{d+1}, un x_i est le quotient dans la division euclidienne d'un nombre de la forme $10r_i$ par b, où $x = \frac{a}{b}$ et où les r_i sont à préciser. Utiliser le principe des tiroirs.

Indication pour le sens réciproque : faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 4. *D'autres irrationalités*

1. Montrer que $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel.
2. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ n'est pas rationnel. [1]

Exercice 5. *Fractions vs Flottants*

Récupérer le fichier *Q.py* implémenté en cours.

1. Écrire une fonction qui convertit une fraction en flottant. Expliquer pourquoi cette conversion n'est pas fidèle.
2. Écrire une fonction qui convertit un flottant en fraction. (Cette fonction existe essentiellement déjà en Python. Si vous la trouvez, pas d'objection à ce que la vôtre soit un simple alias.)

1. Ah ah. Plus dur, hein.

1 Analyse

Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{n+15}{n+1}} \geqslant 0$

On en déduit $p \geqslant 0$

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{n+15}{n+1}$$

D'après Eudoxe, $(n+15)-(n+1) = 14$

donc $(n+15)-(n+1) \mid 14$.

d'où $(n+15) \wedge (n+1) \in \{1, 2, 7, 14\}$

Traitons 4 cas

1er cas $((n+15)\wedge(n+1) = 1)$:

Soit $\begin{cases} n+15 = p^2 \\ n+1 = q^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow 14 = p^2 - q^2$$
$$= (p+q)(p-q)$$

$\begin{cases} p+q = 14 \\ p-q = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p+q = 7 \\ p-q = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p+q = -14 \\ p-q = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p+q = -7 \\ p-q = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ faux ou faux ou faux ou faux

car $p+q$ et $p-q$ ont la même parité et 14 et 1 n'ont pas la même parité. : car $p+q \geqslant 0$ car $p, q \geqslant 0$

Soit $\begin{cases} n+15 = -p^2 \\ n+1 = -q^2 \end{cases} \Rightarrow 14 = q^2 - p^2$. À renommage près, on a le même résultat.

<u>2e cas</u> $((n+15)\wedge(n+1)=2)$:

Soit $\begin{cases} \frac{1}{2}(n+15) = p^2 \\ \frac{1}{2}(n+1) = q^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 14 = 2(p+q)(p-q)$
$\Leftrightarrow 7 = (p+q)(p-q)$

donc $\begin{cases} p+q = 7 \\ p-q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=3 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} \frac{1}{2}(n+15) = -p^2 \\ \frac{1}{2}(n+1) = -q^2 \end{cases}$. À renomage près, $(p,q)=(4,3)$

<u>3e cas</u> $((n+15)\wedge(n+1)=7)$:

Soit $\begin{cases} \frac{1}{7}(n+15) = p^2 \\ \frac{1}{7}(n+1) = q^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 7(p^2-q^2) = 14$

$\Leftrightarrow 2 = (p+q)(p-q)$

$\Rightarrow \begin{cases} p+q = 2 \\ p-q = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (p,q) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$p,q \notin \mathbb{Z}$, pas de solution

Soit $\begin{cases} \frac{1}{7}(n+15) = -p^2 \\ \frac{1}{7}(n+1) = -q^2 \end{cases}$. À renomage près, pas de solution.

<u>4e cas</u> $((n+15)\wedge(n+1)=14)$:

Soit $\begin{cases} \frac{1}{14}(n+15) = p^2 \\ \frac{1}{14}(n+1) = q^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 14(p^2-q^2) = 14$

$\Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} p+q = 1 \\ p-q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \notin \mathbb{N}^* \end{cases}$

pas de solutions

Soit $\begin{cases} \frac{1}{14}(n+15) = -p^2 \\ \frac{1}{14}(n+1) = -q^2 \end{cases}$.

On a $p = 1$ et $q = 0$ en renommant.

<u>Synthèse</u> Testons nos candidats.

<u>1er cas</u> : $(p, q) = (4, 3)$

Dans ce cas, $\frac{1}{2}(n+1) = q^2$. On a $\frac{n+1}{2} = 9 \Leftrightarrow n = 17 \in \mathbb{Z}$
avec $q = 4$

$$\sqrt{\frac{n+17}{n+1}} = \sqrt{\frac{32}{18}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$$

<u>2e cas</u> : $(p, q) = (3, 4)$

Dans ce cas, $\frac{1}{2}(n+1) = q^2$ On a $\frac{n+1}{2} = -16 \Leftrightarrow n = -33 \in \mathbb{Z}$
avec $q = 3$.

$$\sqrt{\frac{-33+15}{-33+1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}.$$

<u>3e cas</u> $(p, q) = (0, 1)$.

Dans ce cas, $\frac{n+15}{n+1} = 0 \Leftrightarrow n = -15 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{\frac{15-15}{1-15}} = 0 \in \mathbb{Q}$$

<u>Conclusion</u> L'ensemble des solutions S est

$$S = \{-33, -15, 17\}.$$

Bonus

Soient $(a,\dots,f)\in\mathbb{R}^5$ tq $ad-bc\neq 0$.

Mq $\exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} ax+by = e \\ cx+dy = f \end{cases}$

<u>Analyse</u> Soient $x,y\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} ax+by=e & (\times c) \\ cx+dy=f & (\times -a) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} ax+by=e & (\times d) \\ cx+dy=f & (\times -b) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} cax+cby=ce \\ -acx-ady=-af \end{cases}$ $\qquad$ $\Rightarrow \begin{cases} dax+dby=de \\ -bax-bdy=-bf \end{cases}$

$\Rightarrow y(bc-da)=ce-fa$ $\qquad$ $\Rightarrow x(ad-bc)=de-bf$

$\Rightarrow y=\dfrac{ce-fa}{bc-da}$ car $ad-bc\neq 0$ $\qquad$ $\Rightarrow x=\dfrac{de-bf}{ad-bc}$ car $ad-bc\neq 0$

<u>Synthèse</u>

$$\begin{cases} a\dfrac{de-bf}{ad-bc}+b\dfrac{ce-fa}{-(ad-bc)} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad} = e \\[2ex] c\dfrac{de-bf}{ad-bc}+b\dfrac{ce-fa}{-(ad-bc)} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad} = f \end{cases}$$

Ccl $\quad S=\left\{\dfrac{de-bf}{ad-bc}, \dfrac{ce-fa}{bc-ad}\right\}$

$\boxed{2/1}$ $P(X) := X^n + \underbrace{a_{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} X^{n-1} + \cdots + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Z}}$

Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tq $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$. Notons $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ sa forme irréductible

ie $\begin{cases} p \wedge q = 1 \\ q > 0 \end{cases}$

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$\Leftrightarrow q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p^{n-2} q + a_0 q^{n-1}) = -p^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q \mid p^n \cdot 1 \\ q \wedge p^n = 1 \end{cases} \quad \text{d'ap coroll de Bézout}$$

Gauss : $q \mid 1$

Or $q > 0$ donc $\boxed{q = 1}$

donc $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = p \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{2/2}$ $P(X) := \underbrace{a_n X^n}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{a_{n-1}X^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + \cdots + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Z}}$

Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tq $P\left(\frac{a}{b}\right)=0$. Notons $\frac{p}{q} := \frac{a}{b}$ tq $\begin{cases} p \wedge q = 1 \\ q > 0 \end{cases}$

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \Leftrightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0$$

$$\Leftrightarrow q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 p^{n-1}) = -p^n a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q \mid p^n a_n \\ q \wedge p^n = 1 \end{cases} \quad \text{d'après le coroll de Bézout}$$

Gauss : $q \mid a_n$.

de même

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} q p^{n-2} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \mid q^n \cdot a_0 \\ p \wedge q^n = 1 \quad \text{(coroll Bézout)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p \mid a_0$$

$\boxed{2/3}$ Cas particuliers Si $X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ a une racine rationelle alors elle est entière et divise a_0

$\boxed{3}$

remq Décomposition en base B d'un

$$\overline{x_0 x_1 x_2 \cdots x_d , x_{d+1} x_{d+2} \cdots}^{B}$$

$$= \sum_{k=0}^{d} x_k B^{d-k} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_{d+k} B^{-k}$$

$\Leftarrow$:

$$x = \overline{x_0 x_1 \cdots x_d , x_{d+1} \cdots x_{d+r} y_0 \cdots y_{T-1} y_0 \cdots y_{T-1} \cdots}^{10}$$

$$= \frac{\overline{x_0 x_1 x_d x_{d+1} \cdots x_{d+r}}^{10}}{10^r} + \frac{y_0 \cdots y_{T-1}}{10^r} \left(\left(\frac{1}{10}\right)^T + \left(\frac{1}{10}\right)^{2T} + \cdots \right)$$

EXMQ # 3

remq

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d} x_k 10^{d-k} + \sum_{k=1}^{n} x_{d+1} 10^{-k}$$

$\Leftarrow$: Supp x est de la forme

$x_0 \cdots x_d, x_{d+1} \cdots x_{d+r}\, y_1 y_2 \cdots y_T \cdot y_1 y_2 \cdots y_T \cdots$

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d} x_k 10^{d-k} + \sum_{k=1}^{r} x_{d+k} 10 + \sum_{k=1}^{T} y_k 10^{-r-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{T} y_k 10^{-r-T-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{T} y_k 10^{-r-2T-k}$$

$$+ \cdots$$

$$+ \sum_{k=1}^{T} y_k 10^{-r-nT-k}$$

Notons
$$\begin{cases} E := \sum_{k=0}^{d} x_k 10^{d-k} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \\ F := \sum_{k=1}^{r} x_{d+k} 10^{-k} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \\ T_1 := \sum_{k=0}^{T} y_k 10^{-r-k} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ainsi
$$x = \lim_{n\to\infty} E + F + T_1 \sum_{k=0}^{n} 10^{-kp}$$
$$= \lim_{n\to\infty} E + F + T_1 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10^p}\right)^k$$

$$= \lim_{n\to\infty} E + F + T_1 \frac{1-\left(\frac{1}{10^p}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10^p}}$$

$$= \underbrace{E+F}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\overbrace{T_1}^{\in\mathbb{Q}} \frac{\overbrace{1}^{\in\mathbb{Q}}}{\underbrace{1}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{1}{10^p}}_{\in\mathbb{Q}}}}_{\in\mathbb{Q}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in\mathbb{Q}}$$

$\Longrightarrow$: Principe des tirroirs

eg $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

La suite r des restes dans la DE de a^k par n

ie $r \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \\ k \longmapsto \mathrm{rem}(a^k, n) \end{cases}$

On a seulement n restes possibles modulo n :

$0, 1, \dots, n-1$

donc $a^0, a^1, \quad a^n$ sont $n+1$ expressions qui

prennent toutes leurs valeurs dans $[\![0, n[\![$

D'après le principe des tirroirs, on a deux expr qui prennent la même valeur. ie existe $i<j$ tq $a^i \equiv a^j \,[n]$

donc $a^{j+1} \equiv a^{i+1} \dots a^{2j-i-1} \equiv a^{j-1} \quad [n]$

donc $a^{2j-i} \equiv a^j \equiv a^i \equiv a^{2j-i+1} \equiv a^{i+1} \,[n] \dots$

$a^j \equiv a^i \; [n]$ ie $r_j = r_i$

$a^{j+1} \equiv a^{i+1} \; [n]$ ie $r_{j+1} = r_{i+1}$

$a^{j+2} \equiv a^{i+2} \; [n]$ ie $r_{j+2} = r_{i+2}$

$\vdots$

$a^{2j-i-1} \equiv a^{j-1} \; [n]$ ie $r_{2j-i-1} = r_{j-1}$

$a^{2j-i} \equiv a^j \equiv a^i \; [n]$ ie $r_{2j-i} = r_j = r_i$

$a^{2j-i+1} \equiv a^{j+1} \equiv a^{i+1} \; [n]$ ie $r_{2j-i+1} = r_{j+1} = r_{i+1}$

$\vdots$

$a^{3j-2i} \equiv a^i \; [n]$ ie $r_{3j-2i} = r_i$

Supp $x \in \mathbb{Q}$ donc $x = \frac{a}{b}$ $\begin{matrix} \in \mathbb{Z} \\ \in \mathbb{Z}^* \end{matrix}$

$x = \overline{x_0 \dots x_d, x_{d+1} \dots x_r \dots}^{10}$

$\overline{x_0 \dots x_d}^{10} = \lfloor x \rfloor = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor = \text{quo}(a, b) = q_1$ tel que

$a = bq_1 + r_1$ est la DE de a par b.

Et donc $\frac{r_1}{b} = \overline{0, x_{d+1} x_{d+2} \dots x_r \dots}^{10}$

$\frac{10 r_1}{b} = x_{d+1}, \overline{x_{d+2} \dots x_r \dots}^{10}$

donc $x_{d+1} = \lfloor \frac{10 r_1}{b} \rfloor$

donc $x_{d+1} = \text{quo}(10 r_1, b)$

$= q_2$ où $10 r_1 = b q_2 + r_2$

Et donc $\frac{r_2}{b} = \overline{0, x_{d+2} x_{d+3} \dots x_r \dots}^{10}$

donc $x_{d+2} = \left\lfloor \frac{10r_2}{b} \right\rfloor = quo(10r_2, b) = q_3$

où $10r_2 = bq_3 + r_3$

et caetera.

La suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $[\![0, b[\![$

Au plus tard à la $(b+1)$ième décimale, on retrouvera un reste déjà obtenue précédemment et donc à partir de ce rang, la suite des décimales est périodique.

$\boxed{4/1}$ Supp $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ie $\begin{cases} \overset{\text{def}}{\exists} (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

$$6 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 6q^2$$

donc p^2 est un multiple de 6 donc p^2 pair donc p pair

donc $\overset{\text{def}}{\exists} K \in \mathbb{Z}, p = 2K$

on réinjecte : $(2K)^2 = 6q^2 \Leftrightarrow 4K^2 = 6q^2$

$$\Leftrightarrow 3q^2 = \frac{4}{2}K^2 = 2K^2$$

donc $3q^2 \in 2\mathbb{N}$

$\Rightarrow q^2 \in 2\mathbb{N}$

$\Rightarrow q \in 2\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2 \mid p \wedge q$ imp

Meth 2 Supp $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. $1 = \nu_2(\sqrt{6}^2) = 2\nu_2(\sqrt{6}) \Rightarrow \nu_2(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}$ imp

$\boxed{4/2}$ Mq $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. On a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Procédons par l'absurde.

Soit $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Or si $-\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

donc $-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

donc $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

donc $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. imp

Meth 2 Par l'absurde. Supp $\sqrt{3}+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Ainsi, $\overset{\text{déf}}{\exists}(p,q) \in \mathbb{Z}$, $p \wedge q = 1$ tq $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

ie $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$

ie $3+2\sqrt{6}+2 = \frac{p^2}{q^2}$

ie $2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} - 5$

ie $\sqrt{6} = \frac{p^2}{2q^2} - \frac{5}{2}$

$= \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$

imp

car $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

4 / 3

$\sqrt{3}+\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{6} + 2 = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{6} + 6$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{6} + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}\left(2+2\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2+q^2}{q^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2+q^2}{q^2\left(2+2\frac{p}{q}\right)}$ imp car $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$