$\mathbb{N}$

Exercice 1.

Redémontrer le lemme 2 et l'application 3 du cours sans récurrence, en utilisant directement la propriété du bon ordre.

Exercice 2.

Montrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)} \geqslant 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque : « $\tan^{(n)} \geqslant 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ » signifie $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Exercice 3.

Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3$.

Exercice 4. © ★ *Suites définies par récurrence.*

Donner (et démontrer) une expression plus simple des suites définies par récurrence suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_k u_{n-1-k}$.
2. $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2v_k$.
3. $w_0 = 2$, $w_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 4w_{n+1} - 3w_n$.

Exercice 5. *Une "équation fonctionnelle" de type $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Déterminer toutes les applications $f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

- $f(2) = 2$;
- f est strictement croissante ;
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(mn) = f(m)f(n)$.

Exercice 6. *Un résultat important pour la suite.*

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que ϕ est extensive.

Donner un contre-exemple dans un autre ensemble ordonné.

Entiers naturels, exos

$\boxed{1}$ Lemme 2

On veut mtq $\forall n \geqslant 2, \exists k \in \mathbb{P}, n | k$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

n admet un plus petit diviseur p tq

$1 < p \leqslant n$

Donc $A = \{p \in [\![2, n-1]\!], p | n\} \neq \emptyset$ $(n \in A)$

Donc d'ap la propriété du bon ordre A admet un minimum noté p

Procédons par l'absurde Supposons p composé.

Donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tq $q | p$ ainsi $1 < q < p$

Par $\textcircled{T}$, $q | n$ et $q < p$ $\cancel{\text{imp}}$

Ainsi $p \in \mathbb{P}$.

$\boxed{1}$ Application 3

Mtq pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq
$n = 2^p(2q+1)$

Procédons par l'absurde.

Soit $\Delta = \{n \in \mathbb{N}, \nexists (p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)\}$

Supposons $\Delta \neq \emptyset$

$\Delta \subset \mathbb{N}$ donc Δ possède un plus petit élément (bon ordre).
Notons $\delta = \min \Delta$.

<u>Traitons deux cas</u>

<u>1^er cas</u> ($\delta \in 2\mathbb{N}$):

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\delta = 2k+1$. On pose $\begin{cases} p = 0 \\ q = k \end{cases}$

et $\delta = 2^p(2q+1)$ ~~imp~~

<u>2^e cas</u> ($\delta \in 2\mathbb{N}+1$):

Il existe $d \in \mathbb{N}$ tq $\delta = 2d$ et $d < \delta$

donc $d \notin \Delta$

donc il existe $(p_d, q_d) \in \mathbb{N}^2$ tq $d = 2^{p_d}(2q_d+1)$

ainsi $\delta = 2 \cdot 2^{p_d}(2q_d+1) = 2^{p_d+1}(2q_d+1)$

donc $\delta \notin \Delta$ ~~imp~~

$\boxed{2}$ Meth 1

On veut mtq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}_+[X], \tan^{(n)} = P_n \circ \tan$$

<u>Init</u> $n := 0$

$\tan^{(0)} = \tan$

Posons $P_0 = X \in \mathbb{R}_+[X]$ On a bien $P_0 \circ \tan = \tan$

<u>Her</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_+[X]$

tq $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$

C'est dérivable. On dérive:

$$\tan^{(n+1)} = (P_n \circ \tan)'$$

$$= \tan' \cdot (P_n' \circ \tan)$$

$$= (1+\tan^2) \cdot (P_n' \circ \tan)$$

$\boxed{\text{Posons}}$ $P_{n+1} = (X^2+1) \cdot P_n'$

On a bien $\tan^{(n+1)} = P_{n+1} \circ \tan$

On remarque que $\begin{cases} X^2+1 \in \mathbb{R}_+[X] \\ P_n' \in \mathbb{R}_+[X] \end{cases}$.

Par produit $P_{n+1} \in \mathbb{R}_+[X]$

D'où l'hérédité.

Concl La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire.

On a donc bien, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ un polynôme

$P_n \in \mathbb{R}_+[X]$ tq $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$

Notons $P_n = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d_n} X^{d_n}$

On a $\tan^{(n)} = \underbrace{a_0}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_1}_{\geqslant 0} \underbrace{\tan}_{>0} + \underbrace{a_2}_{\geqslant 0} \underbrace{\tan^2}_{>0} + \dots + \underbrace{a_{d_n}}_{\geqslant 0} \underbrace{\tan^{d_n}}_{>0}$

$\Rightarrow \tan^{(n)} \geqslant 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Comme some de produits de positifs

Meth 2 Par récurrence forte.

Hérédité forte Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall k < n$, $\tan^{(k)} \geqslant 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Traitons plusieurs cas

1er cas $(n = 0)$:

$\tan^{(n)} = \tan^{(0)} = \tan \geqslant 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

2e cas $(n = 1)$:

$\tan^{(n)} = \tan' = 1 + \tan^2 \geqslant 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

3e cas $(n \geqslant 2)$

$\tan^{(n)} = (\tan')^{(n-1)}$

$= (1 + \tan^2)^{(n-1)}$

$= \cancel{1^{(n-1)}}^{*} + (\tan^2)^{(n-1)}$

$= (\tan^2)^{(n-1)}$

$*$ car $n - 1 \geqslant 1$

Leibniz $= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \underline{\tan^{(k)}} \tan^{(n-1-k)}$

On a par hdrf pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ On a $k < n$

et $n - 1 - k < n$

donc $\tan^{(k)} \geqslant 0$ et $\tan^{(n-1-k)} \geqslant 0$

sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$\mathbb{N}$

Correction

Exercice 3.

Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3\ \ (\star)$.

D'après le cours sur les sommes, la suite identité $(n)_{n\geqslant 1}$ convient. L'examen des premières valeurs semble montrer que c'est la seule solution. Montrons-le par récurrence forte. Autrement dit, soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite vérifiant $(\star)$; montrons par récurrence forte qu'on a $\forall n \geqslant 1,\ a_n = n$.

Hérédité forte : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall 1 \leqslant k < n,\ a_k = k$ (hdrf).

L'hypothèse $(\star)$ donne, en particulier, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3$.

Ce que Chasles réécrit $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 + 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i\right) a_n + a_n^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^3\right) + a_n^3$.

Par hdrf, ceci se réécrit : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} i\right)^2 + 2a_n\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} i\right) + a_n^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} i^3\right) + a_n^3$ et comme on a $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} i^3$ et $\sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ (cours sur les sommes), on obtient donc $n(n-1)a_n + a_n^2 = a_n^3$, ou encore $a_n(a_n^2 - a_n - n(n-1)) = 0$.

Enfin, comme on a $a_n \in \mathbb{N}^*$ on a en particulier $a_n \neq 0$ donc $a_n^2 - a_n - n(n-1) = 0$. Ainsi a_n est racine d'un trinôme dont le discriminant est $(-1)^2 - 4(-n)(n-1) = (2n-1)^2$ et dont les racines sont n et $1 - n \leqslant 0$ (car $n \geqslant 1$).

Comme on a $a_n > 0$ on déduit finalement $\boxed{a_n = n}$.

La propriété est fortement héréditaire.

Conclusion : la propriété est fortement héréditaire à partir du rang 1, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Remarque : Cette récurrence forte a ceci d'assez remarquable qu'elle ne nécessite pas de disjonction de cas dans l'étape d'hérédité forte. C'est rare mais on en verra un autre exemple dans le chapitre sur les applications.

Autre remarque : ici on a toute de suite remarqué que l'identité était solution. On aurait pu le faire à la fin (auquel cas on aurait pu rédiger par analyse-synthèse). Dans tous les cas **il faut le faire**, sinon on a seulement fait la moitié du travail !

Exercice 4. © ★ *Suites définies par récurrence.*

Donner (et démontrer) une expression plus simple des suites définies par récurrence suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_k u_{n-1-k}$.
2. $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} 2v_k$.
3. $w_0 = 2$, $w_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 4w_{n+1} - 3w_n$.

2. Cette suite est "faussement" définie par récurrence forte. En effet, on a $v_0 = 1$, $v_1 = 2v_0 = 2$ puis, pour $n \geqslant 1$ on a $v_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2v_k\right) + 2v_n = v_n + 2v_n = 3v_n$. La suite est donc géométrique de raison 3 à partir du rang 1, ce qui donne $\forall n \geqslant 1,\ v_n = v_1 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$.

   Si on tient à une formule unifiant les cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lceil 2 \times 3^{n-1} \rceil$, où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière par excès de x. Bof.

3. L'examen des premières valeurs conduit à conjecturer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 3^n + 1$. Une récurrence double sans aucune inspiration permet alors de le montrer.

   Voici une autre méthode : pour $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+2} - w_{n+1} = 4w_{n+1} - 3w_n - w_{n+1} = 3(w_{n+1} - w_n)$. Autrement dit la suite $\left(w_{n+2} - w_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = 3^n(w_1 - w_0) = 2 \times 3^n$. On a donc $w_n = 2 \times 3^{n-1} + w_{n-1} = 2 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^{n-2} + w_{n-2} = \cdots = 2 \times \left(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0\right) + w_0 = 2 \times \left(\frac{3^n - 1}{2}\right) + 2 = 3^{n-1} + 1$ et hop.

4/1 $\quad u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_k u_{n-1-k}$

n	u_n
0	1
1	$u_0^2 = 1$
2	$u_0 u_1 + u_1 u_0 = 2$
3	$u_0 u_2 + 2u_1^2 + u_2 u_0 = 6$
4	$u_0 u_3 + 3u_1 u_2 + 3u_2 u_1 + u_3 u_0 = 24$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = n!$ par récurrence forte

Hérédité forte Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall k < n, \; u_k = k!$

Deux cas

1er cas ($n=0$):

$u_0 = 1 = 0!$ $\quad$ On a bien $u_n = n!$

2^e cas ($n \neq 0$):

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_k u_{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k!(n-1-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\cancel{k!\,(n-1-k)!}} \cancel{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$= (n-1)! \cdot n$$

$$= n!$$

Dans tous les cas $u_n = n!$

D'où l'hdrf

$\boxed{5}$

$$\begin{cases} f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ f(2) = 2 \\ f \in \nearrow(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ f(mn) = f(m) f(n) \end{cases}$$

n	0	1	2	3	$4 = 2 \cdot 2$	5	$6 = 2 \cdot 3$	7	$8 = 2 \cdot 4$
$f(n)$	$0\ \cancel{\text{ou } 1}$	$\cancel{0 \text{ ou}}\ 1$	2	3	4	5	6	7	8

<u>Montrons qu'on a</u> $f = \mathrm{id}$ par récurrence forte.

[corrigé PDF]

Exercice 5. *Une "équation fonctionnelle" de type* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*.*

Déterminer toutes les applications $f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

- $f(2) = 2$;
- f est strictement croissante ;
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(mn) = f(m)f(n)$.

L'application $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ convient. Supposons réciproquement que f vérifie les hypothèses et montrons qu'on a $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$. On procède par récurrence forte.

Hérédité forte : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall k < n,\ f(k) = k$. Traitons trois cas :

- Premier cas : $n \in \{0, 1\}$. On a par stricte croissance on a $f(0) < f(1) < f(2)$. Par hypothèse on a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $f(2) = 2$ donc $0 \leqslant f(0) < f(1) < 2$ ce qui ne laisse pas d'autre possibilité que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On a donc bien $f(n) = n$.
- Deuxième cas : $n \geqslant 2$ et n est pair. Alors n est de la forme $2k$ avec $k < n$ donc par hypothèse de récurrence $f(k) = k$. Les hypothèses sur f indiquent qu'on a $f(2) = 2$ et $f(2k) = f(2)f(k)$. Finalement $f(n) = f(2k) = f(2)f(k) = 2k = n$.
- Troisième cas : $n \geqslant 2$ et n est impair. Alors n est de la forme $2k + 1$ avec $k < k + 1 < n$ donc par hypothèse de récurrence $f(k) = k$ et $f(k + 1) = k + 1$. Les hypothèses sur f donnent $f(2k) = f(2)f(k) = 2k$ et $f(2k + 2) = f(2)f(k + 1) = 2k + 2$. Enfin par stricte croissance on a $2k = f(2k) < f(2k + 1) < f(2k + 2) = 2k + 2$ ce qui ne laisse que $f(2k + 1) = 2k + 1$ *i. e.* $f(n) = n$.

D'où l'hérédité forte.

Conclusion : la propriété « $f(n) = n$ » est fortement héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi a-t-on $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Remarque : encore une fois **il faut explicitement signaler** que $f = \mathrm{id}$ est bien solution (au début, à la fin, peu importe, mais il faut le faire), sinon on a seulement fait la moitié du travail.