Équations différentielles linéaires

EDL du premier ordre

Exercice 1. *Équations différentielles du premier ordre.* ©© ★

a. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - \dfrac{t}{t^2+1}y = t$.

b. Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $y' + \tan(t)y = \sin(t) - \sin(2t)$.

c. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' + ty = t^3 \\ y(0) = -1. \end{cases}$

d. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^\times$: $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{t^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$

e. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$ puis sur $\mathbb{R}$: $y' + y = \mathrm{e}^{-|t|}$.

Exercice 2. *Un plan solution.* ©© ★
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy' = 3y$.

Exercice 3. *Deux points où recoller.* ©© ★
On s'intéresse à l'équation (E) : $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$.

a. Résoudre (E) sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$.
b. (E) a-t-elle une solution sur $\mathbb{R}$?
c. Trouver toutes les solutions maximales (c'est-à-dire dont le domaine de définition est un intervalle maximal pour l'inclusion [1] parmi les intervalles sur lesquels une solution peut exister) de (E).

Équations se ramenant à des EDL de formes connues

Exercice 4. ©© ★
Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + f(x) = \mathrm{e}^x$.
Indication : montrer qu'une telle fonction est $\mathcal{D}^2$ et établir une équation différentielle du second ordre qu'elle vérifie.

Exercice 5. *Équation "différentielle-fonctionnelle" se ramenant à une équation d'Euler.* ©©© ★★

1. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $t^2 f''(t) + f(t) = 0$ (E_2).
   Pour résoudre l'équation, on « effectue le changement de variables $t = \mathrm{e}^x$ ».
   Cela signifie qu'on change de fonction inconnue de la façon suivante : on pose $g = f \circ \exp$.
   Déterminer une équation différentielle vérifiée par g. Déterminer g puis déduire f.
2. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ (E_3).
   a. Montrer que, si f est solution de (E_3), alors f est solution de (E_2).
   b. Résoudre (E_3).

1. L'expression "solution maximale" se justifie ainsi : toute solution est la restriction d'une solution maximale.

Une équation à variables séparées

Exercice 6. *Modèle logistique* ©© ★★
Un modèle très simpliste en dynamique des populations conduit à l'équation différentielle
$(E) \quad : \quad y' = ay\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ où a et K sont des réels strictement positifs [2] [3].
On s'intéresse ici aux solutions y de (E) pour lesquelles[4] *on a* $\forall t \in \mathbb{R}, 0 < y(t) < K$.

Dans toute la suite, y désigne une telle solution.

1. L'objectif de cette question est de prédire le comportement de y sans résoudre (E). On suppose que y existe.
   a. Déterminer la monotonie de y et justifier qu'elle a deux assymptotes horizontales, en $+\infty$ et $-\infty$.
   b. Justifier que, pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \ell > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
   En déduire que y a pour assymptote horizontale la droite d'ordonnée K en $+\infty$.
   Montrer de même que y a pour assymptote horizontale l'axe des abscisses en $-\infty$.
   c. Justifier que y est deux fois dérivable, qu'il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) = \dfrac{K}{2}$, et qu'on a $y''(t_0) = 0$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   d. Tracer grossièrement quelques courbes représentatives possibles pour y, en supposant que y existe.

2. L'objectif de cette question est de donner l'expression analytique de y.
   a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle en y suivante : $\dfrac{1}{y(1-\frac{y}{K})}$.
   b. En déduire l'existence d'une constante C telle que $\ln(y(t)) - \ln(K - y(t)) = at + C$.
   c. En déduire l'existence d'une constante D telle que $y(t) = \dfrac{Ke^{at}}{e^{at} + D}$.

2. Quoique rudimentaire, ce modèle a de bonnes raisons d'être proposé par les biologistes : voyez-vous lesquelles ?
3. Oh mon Dieu ça sert à quelque chose. Est-ce encore des maths ?
4. Pourquoi celles-là ?