Équations différentielles linéaires.

Contexte : dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non trivial, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation 1 Pour gagner un peu de place et de temps :
ED : Équation différentielle.
EDL : Équation différentielle linéaire.

Notation 2 Pour gagner un peu de place et de temps :
ED : Équation différentielle.
EDL : Équation différentielle linéaire.

I Généralités sur les EDL

I.1 Terminologie

Définition 1 : EDL sur I.

On appelle EDL sur I une équation dont l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{D}^n$ et de la forme

$$\forall t,\ a_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \qquad \text{où :}$$

- $n \in \mathbb{N}$ est appelé l'ordre de l'EDL ;
- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ sont appelés les coefficients de l'EDL ;
- $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est appelé le second membre de l'EDL.

Définition 2 : Solution d'une EDL.

On appelle solution locale de l'EDL un couple (J, y) avec J un intervalle inclus dans I et $y \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$ qui vérifie l'équation (pour $t \in J$). Pour $J = I$ on parle de solution globale, celles qui nous intéressent en priorité.

I.2 Théorème de Cauchy-linéaire.

Définition 3 : Problème de Cauchy.

On appelle problème de Cauchy un système de la forme

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. (Et où les a_i et b sont $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ comme d'habitude.)

Théorème 1 : Cauchy linéaire.

Un problème de Cauchy a toujours une unique solution.

I.3 Théorème de structure affine

Théorème 2 : de structure affine.

L'ensemble des solutions (globales) d'une EDL résolue est un sea de direction l'ensemble des solutions de l'EDLH associée. Sa dimension est l'ordre de l'EDL.

Théorème 3 : Principe de superposition.

Soient $a_0, \ldots, a_n, b, b_1 \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b_1(t)$;
et y_2 est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b_2(t)$;
alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

II EDL du premier ordre

II.1 Cas résolu homogène

Théorème 4 .

L'ensemble des solutions globales est .... où ....

II.2 Cas résolu non homogène

Théorème 5 : Variations de la constante.

En gardant les mêmes notations que précédemment, on peut toujours trouver une solution particulière de la forme $t \mapsto K(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ à l'aide d'un simple calcul de primitive.

II.3 Cas non résolu

III EDL du second ordre à coefficients constants

III.1 Cas homogène

Définition 4 .

On appelle <u>polynôme caractéristique</u> de l'EDL le polynôme $\chi(X) = aX^2 + bX + c$.

Théorème 6 : Second ordre à coefficients constants, cas homogène.

Notons S_H l'ensemble des solutions globales.

1. Si χ a deux racines r_1, r_2 dans $\mathbb{K}$ alors l'ensemble des solutions est $S_H = \left\{t \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t},\ \binom{A}{B} \in \mathbb{K}^2\right\}$.
2. Si χ a une racine double r_0 dans $\mathbb{K}$ alors l'ensemble des solutions est $S_H = \left\{t \mapsto (A+Bt)\mathrm{e}^{r_0 t},\ \binom{A}{B} \in \mathbb{K}^2\right\}$.
3. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si χ a deux racines complexes conjuguées $\alpha + \mathbf{i}\omega$ et $\alpha - \mathbf{i}\omega$ alors on a $S_H = \left\{t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)),\ \binom{A}{B} \in \mathbb{R}^2\right\}$.

III.2 Cas d'un second membre de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$

Théorème 7 .

L'équation $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ a toujours une solution particulière de la forme $t^\mu Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ où :

- μ est la multiplicité de γ comme racine de χ
- Q est un polynôme de même degré que P.

IV Autres équations différentielles

IV.1 Méthode d'Euler

Remarque 1

Même dans le cas $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ la méthode d'Euler peut être utile car

IV.2 Changement de fonction inconnue

IV.3 Changement de variable

IV.4 Équations à variables séparées