Équations différentielles linéaires.

Contexte : dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non trivial, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation 1 Pour gagner un peu de place et de temps :
ED : Équation différentielle.
EDL : Équation différentielle linéaire.

I Généralités sur les EDL

I.1 Terminologie

Définition 1 : EDL sur I.
On appelle EDL sur I une équation dont l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{D}^n$ et de la forme

$$\forall t,\ a_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \qquad \text{où :}$$

- $n \in \mathbb{N}$ est appelé l'ordre de l'EDL ;
- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ sont appelés les coefficients de l'EDL ;
- $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est appelé le second membre de l'EDL.

Je ne précise pas où vit t.
Dans l'idéal, on cherche les solutions sur I, mais on peut aussi chercher des solutions sur un intervalle $J \subset I$.

Encore un peu de terminologie :

1. Si $b = t \mapsto 0$, on dit que l'EDL est homogène (notation pour la suite : EDLH). Sinon, l'équation obtenue en changeant b par $t \mapsto 0$ est appelée EDLH associée à l'EDL.
2. Si $a_n = t \mapsto 1$ *i. e.* si l'EDL peut s'écrire sous la forme $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y + b$,, on dit que l'EDL est résolue (ou résoluble).
3. Si les fonctions $a_0, \ldots, a_n$ sont constantes, on dit que l'EDL est à coefficients constants. On s'était limités aux EDL à coefficients constants d'ordre 1 e 2 en TACMAS.

Exemples 1

1. $t \mapsto t^n y^{(n)}(t) + \cdots + ty'(t) + y(t) = 0$ est une EDLH d'ordre n non résolue, à coefficients non-constants.
2. $y' = y$ est une EDLH résolue d'ordre 1 à coefficients constants.
3. $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ est une ED non-linéaire
4. Considérons $ty'(t) + y(t) = 0$: est une EDLH d'ordre 1 non résolue, à coefficients non-constants.

Définition 2 : Solution d'une EDL.
On appelle solution locale de l'EDL un couple (J, y) avec J un intervalle inclus dans I et $y \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$ qui vérifie l'équation (pour $t \in J$). Pour $J = I$ on parle de solution globale, celles qui nous intéressent en priorité.

Exemples 2

1. Une solutions globale : $\{t \mapsto 0\}$
2. L'ensemble de toutes les solutions globales est $\mathbb{R}\exp$. Toutes les solutions locales sont obtenues par restriction d'une solution locale
3.
$$\begin{aligned} \mathrm{id}y + 1y' = 0 &\Leftrightarrow (\mathrm{id}y)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{K}, \mathrm{id}y = t \mapsto c \end{aligned}$$

Solutions locales — $\frac{c}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}$

— $\frac{c}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_-^*}}$

Solutions globales La seule est $t \mapsto 0$

I.2 Théorème de Cauchy-linéaire.

Définition 3 : Problème de Cauchy.

On appelle problème de Cauchy un système de la forme

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. (Et où les a_i et b sont $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ comme d'habitude.)

/!\

- L'équation doit être résolue.
- Le t_0 doit être le même dans chaque condition initiale.

Théorème 1 : Cauchy linéaire.

Un problème de Cauchy a toujours une unique solution.

Démonstration. Admis. En fait en sup il est juste au programme à l'ordre 1 et 2 (mais pas en spé). □

/!\ Si « le t_0 n'est pas le même » ou si l'équation n'est pas résolue, le résultat n'est plus vrai.

Exemples 3

1. Le système $\begin{cases} ty'(t) - 2y(t) = 0 & (E) \\ y(0) = 0 & (CI) \end{cases}$ n'a pas une unique solution. il en a au moins deux $t \mapsto 0$ et id. Le problème est que l'EDL n'est pas résolue
2. Variante : $\begin{cases} ty'(t) - 2y(t) = 0 & (E) \\ y(0) = 1 & (CI) \end{cases}$ n'a pas une unique solution.

   Il n'en a pas : $ty'(0) - 2y(0) = -2 \neq 0$, (E) contredit (CI)
3. Le système $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 & (E) \\ y(0) = 0 & (CI_1) \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & (CI_2) \end{cases}$ n'a pas une unique solution.

   Il en a au moins deux : $\pm\sin$ Les CIs ne sont pas les mêmes ($\frac{\pi}{2} \neq 0$)
4. Variante : $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 & (E) \\ y(0) = 0 & (CI_1) \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & (CI_2) \end{cases}$ n'a pas une unique solution.

   Il n'en a pas :

$$(E) \wedge (CI_1) \implies \text{solutions } = \mathbb{R}\sin \implies \neg(CI_2)$$

I.3 Théorème de structure affine

Théorème 2 : de structure affine.

L'ensemble des solutions (globales) d'une EDL résolue est un sea de direction l'ensemble des solutions de l'EDLH associée. Sa dimension est l'ordre de l'EDL.

Démonstration. C'est juste l'exemple fondamental de sous-espace affine ! On a $\begin{cases} E &= \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \\ F &= \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &= y \mapsto y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot y^{(k)} \\ b &= b \end{cases}$

Reste à voir que S_H n'est pas vide et sa dimension

On a $S \neq \emptyset$ car, d'après Cauchy-Linéaire, il existe une (unique) solution de l'EDL telle que

$$\begin{cases} y(t_0) & = 0 \\ y'(t_0) & = 0 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) & = 0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I$$

Si $S \neq \emptyset$, sa direction est $\vec{S} = \operatorname{Ker} f = S_H$

$$\dim S = \dim S_H$$

Considérons $\begin{cases} S_H & \to \mathbb{K}^n \\ y & \mapsto \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$ où $t_0 \in I$ qui est linéaire par linéarité de l'évaluation et de la dérivation.

ϕ est bijective, c'est une reformulation de Cauchy-linéaire appliqué à l'EDLH

□

Théorème 3 : Principe de superposition.

Soient $a_0, \dots, a_n, b, b_1 \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b_1(t)$;
et y_2 est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b_2(t)$;
alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

Démonstration. C'est immédiat par linéarité de $y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$. □

II EDL du premier ordre

II.1 Cas résolu homogène

Il s'agit de $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, où $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Théorème 4 .

L'ensemble des solutions globales est $\mathbb{R} \exp \circ (-A)$ où A est une primitive de a.

Démonstration. Notons $S_H = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), y' + a = 0\}$ On veut montrer $S_H = \mathbb{R} \exp \circ (-A)$ où $A' := a$

$\boxed{\supset}$ On sait que S_H est un sev, il suffit de montrer que $\exp \circ -A \in S_H$

Notons $\begin{cases} y & = \exp \circ -A \\ y' & = -A' \exp \circ (-A) \\ & = -a \exp \circ (-A) \end{cases}$

On a ainsi

$$\begin{aligned} y' + a \cdot y &= -a \cdot \exp \circ - A + a \cdot \exp \circ - A \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{R} \exp \circ -A \subset S_H$ or

$$\dim(\mathbb{R} \exp \circ -A) = 1 \qquad \text{car } \exp \circ - A \neq 0$$

et $\dim S_H = 1$ d'après TSAffine
D'où

$$\mathbb{R}\exp\circ(-A) = S_H$$

$\square$

Exemple 4 On résout sur $\mathbb{R}_+^*$: $\begin{cases} ty'(t) + \ln(t)y(t) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.
On obtient $y' + \frac{\ln}{\mathrm{id}}y = 0$

$$\begin{aligned} S_H &= \mathbb{R}\exp\circ\left(-\int\frac{\ln}{\mathrm{id}}\right) \\ &= \mathbb{R}\exp\circ\left(-\frac{1}{2}\ln^2\right) \end{aligned}$$

Conditions initiales : $y(1) = 0 \implies S = \{0\}$

II.2 Cas résolu non homogène

Il s'agit de ...., où ....

D'après le théorème de structure affine, il suffit de trouver une solution particulière.

Théorème 5 : Variations de la constante.

En gardant les mêmes notations que précédemment, on peut toujours trouver une solution particulière de la forme $t \mapsto K(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ à l'aide d'un simple calcul de primitive.

Démonstration. On cherche y_p sous la forme $y_p = t \mapsto K(t)e^{-A(t)}$. On réinjecte :

$$\begin{aligned} & y_p'(t) + a(t)y_p(t) = b(t) \\ \Leftrightarrow K'(t)e^{-A(t)} + \cancel{K(t)(-a(t))e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)K(t)e^{-A(t)}} &= b(t) \\ \Leftrightarrow K'(t) &= b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Puis $\boxed{y_p = \left(\int_{t_0}^{t} b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}\,x\right)e^{-A(t)}}$ $\square$

N'apprenez pas cette formule par cœur, retenez juste la méthode !

Exemples 5 On résout sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Puis on résout sur $\mathbb{R}_+^*$: $ty'(t) - 2y(t) = \ln(t)$.

1. $y'(t) - 2ty(t) = t$ Trouvons la solution homogène ($y' - Z\mathrm{id}\cdot y = 0$)

$$\begin{aligned} S_H &= \mathbb{R}\exp\circ\int 2\mathrm{id} \\ &= \mathbb{R}\exp\circ\mathrm{id}^2 \end{aligned}$$

Maintenat pour y_p

$$\begin{aligned} y_p &= K(t)e^{t^2} \\ \text{ie } 2tK(t)e^{t^2} + K'(t)e^{t^2} - 2tK(t)e^{t^2} &= t && \text{en réinjectant} \\ K'(t) &= te^{-t^2} \\ &= -\frac{1}{2}(-2te^{-t^2}) \\ K(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t^2} && \text{convient} \\ y_p(t) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \mathbb{R}\exp\circ\mathrm{id}^2 - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \text{ie } A - \frac{1}{2} &= 0 \\ \text{ie } A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où $S_C = \{\frac{1}{2}(\exp\circ\mathrm{id}^2 - 1)\}$

2. L'équation équivaut à $y' - \frac{2}{\mathrm{id}}y = \frac{\ln}{\mathrm{id}}$
   Équation homogène : $y' - \frac{2}{\mathrm{id}}y = 0$

$$\begin{aligned} S_H &= \mathbb{K}\exp\circ(2\ln) \\ &= \mathbb{K}\mathrm{id}^2 \end{aligned}$$

Cherchons y_p sous la forme

$$\begin{aligned} y_p &= t \mapsto K(t)t^2 \\ y_p' - \frac{2}{\mathrm{id}}y_p &= \frac{\ln}{\mathrm{id}} \\ \text{ie } K'\cdot\mathrm{id}^2 + 2\mathrm{id}\cdot K - 2\mathrm{id}\cdot K &= \frac{\ln}{\mathrm{id}} \\ \text{ie } K' &= \frac{\ln}{\mathrm{id}^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln t}{t^3}\,\mathrm{d}\,t &= \int \frac{x}{e^{3x}}e^x\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int xe^{-2x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[x\frac{e^{-2x}}{-2}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\ &= -\frac{x}{2(e^x)^2} - \frac{1}{4(e^x)^2} \\ &= -\frac{\ln(t)}{2t^2} - \frac{1}{4t^2}\end{aligned} \qquad \begin{cases} x &= \ln t \\ x &= \frac{\mathrm{d}\,t}{t}\end{cases}$$

D'où

$$y_p = K\cdot \mathrm{id}^2 = -\frac{\ln}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S = \mathbb{R}\mathrm{id}^2 - \frac{\ln}{2} - \frac{1}{4}$$

II.3 Cas non résolu

Il s'agit de $a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$, où $a_1, a_0, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Méthode :

1. On cherche les intervalles maximaux sur lesquels a_1 ne s'annule pas.
2. On résout sur ces intervalles en divisant par a_1.
3. On recolle les solutions obtenues si c'est possible.

Exemple 6 On résout $t^2y'(t) - y(t) = 0$.

1. id^2 s'annule uniquement en 0, on résout sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$ se divise par id^2. L'équation équivaut à

$$y' \underbrace{- \frac{1}{t^2}}_{a} y(t) = 0$$

   Les solutions sont les

$$K \exp\circ(-A)$$

   où A est une primitive de $a = -\frac{1}{\mathrm{id}^2}$, $A = \frac{1}{\mathrm{id}}$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont les

$$K_+ \exp\circ(-\frac{1}{\mathrm{id}})$$

3. Sur $\mathbb{R}_-^*$: idem :

$$K_- \exp\circ(-\frac{1}{\mathrm{id}})$$

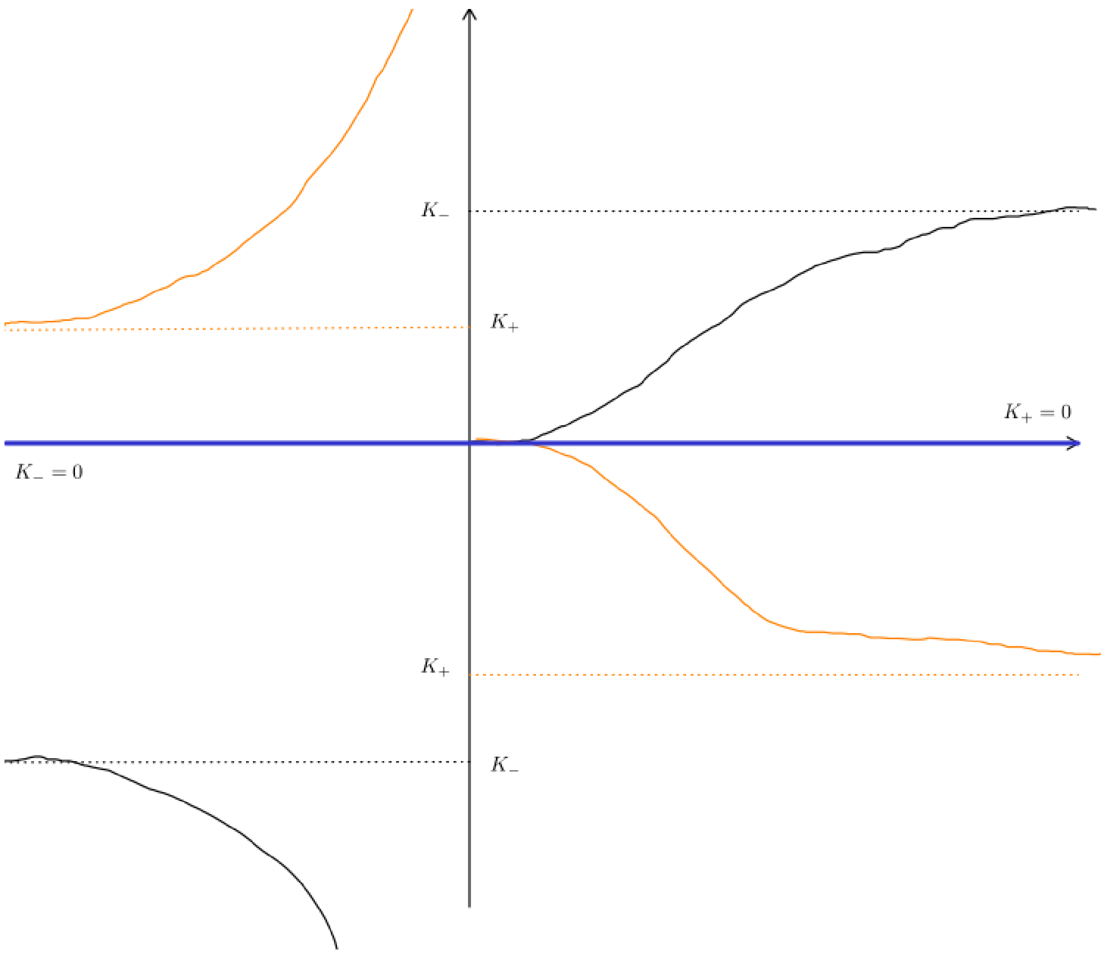

FIGURE 1 – Fig 1

Un candidat est une application de la forme

$$y : t \mapsto \begin{cases} K_+ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ K_- e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

avec $K_+, K_- \in \mathbb{R}$ (la valeur en 0 est obtenue en réinjectant $t = 0$ dans l'EDL non résolue)
On a

$$\begin{aligned} y \text{ est solution} &\Leftrightarrow y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow y \in \mathcal{D}(\{0\}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

En particulier, y doit être continu en 0 donc $\lim_{t \to 0^-} y(t) = y(0)$
i. e. $\lim_{t \to 0^-} K_- e^{-\frac{1}{t}} = 0$ *i. e.* $K_- = 0$
Donc

$$y = t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ K_+ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Montrons qu'une telle fonction est dérivable en 0 : avec le taux d'accroissement.
Il suffit de montrer la dérivabilité à droite.

$$\begin{aligned} \tau_{y,0}(t) &= \frac{K_+ e^{-\frac{1}{t}}}{t - 0} \\ &= K_+ \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} && \text{pour } t > 0 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{K_+e^{-x}}{\frac{1}{x}} && \text{avec } x:=\frac{1}{t}\\ &= \lim_{x\to+\infty} K_+xe^{-x}\\ &=0 && \text{par CC.}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}S &= \operatorname{Vect}\left(t\mapsto\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\exp\circ(-\frac{1}{\mathrm{id}})\cdot 1_{]0,+\infty[}\right)\end{aligned}$$

III EDL du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse à $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t)$, où $a,b,c\in\mathbb{K}$ (et $a\neq0$). Donc c'est résolu.

On sait déjà par théorème de structure affine que l'ensemble des solutions est un $\operatorname{Ker}(a\cdot''+b\cdot'+c\mathrm{id})$.

III.1 Cas homogène

Il s'agit de $ay''+by'+cy=0$, où $(a,b,c)\in K^*\times\mathbb{K}^2$.

Exercice 1. Cherchons les solutions exponentielles.

$$\begin{aligned}e^{r\mathrm{id}} \text{ est solution} &\Leftrightarrow ar^2e^{r\mathrm{id}}+bre^{r\mathrm{id}}+ce^{r\mathrm{id}}=0\\ &\Leftrightarrow (ar^2+br+c)e^{r\mathrm{id}}=0 && \text{car } e^{r\mathrm{id}} \text{ NSP}\end{aligned}$$

Définition 4 .

On appelle <u>polynôme caractéristique</u> de l'EDL le polynôme $\chi(X)=aX^2+bX+c$.

/!\ Ça n'a de sens que pour une EDL à coefficients constants !

Théorème 6 : Second ordre à coefficients constants, cas homogène.

Notons S_H l'ensemble des solutions globales.

1. Si χ a deux racines r_1,r_2 dans $\mathbb{K}$ alors l'ensemble des solutions est $S_H=\left\{t\mapsto Ae^{r_1t}+Be^{r_2t},\ \binom{A}{B}\in\mathbb{K}^2\right\}$.
2. Si χ a une racine double r_0 dans $\mathbb{K}$ alors l'ensemble des solutions est $S_H=\left\{t\mapsto (A+Bt)e^{r_0t},\ \binom{A}{B}\in\mathbb{K}^2\right\}$.
3. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, si χ a deux racines complexes conjuguées $\alpha+\mathrm{i}\omega$ et $\alpha-\mathrm{i}\omega$ alors on a $S_H=\left\{t\mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)),\ \binom{A}{B}\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Démonstration. 1. $S_H=\operatorname{Vect}\left(e^{r_1\mathrm{id}},e^{r_2\mathrm{id}}\right)$

$\boxed{\supset}$ On a vu que $e^{r_1\mathrm{id}}$ et $e^{r_2\mathrm{id}}$ sont solutions.
Or S_H est un sev.
donc $\operatorname{Vect}\left(e^{r_1\mathrm{id}},e^{r_2\mathrm{id}}\right)$ est un sev.
Or

$$e^{r_1\mathrm{id}} \not\parallel e^{r_2\mathrm{id}}$$

donc $\dim\operatorname{Vect}\left(e^{r_1\mathrm{id}},e^{r_2\mathrm{id}}\right)=2=\dim S_H$
Or $\operatorname{Vect}\left(e^{r_1\mathrm{id}},e^{r_2\mathrm{id}}\right)\subset S_H$
Donc $\operatorname{Vect}\left(e^{r_1\mathrm{id}},e^{r_2\mathrm{id}}\right)=S_H$

2. Idem. Il suffit de vérifier que $\mathrm{id}\exp\circ(r_0\mathrm{id}) \in S_H$

   Or r_0 est racine double donc $\begin{cases} ar_0^2 + br_0 + c &= 0 \\ 2ar_0 + b &= 0 \end{cases}$

   Notons $y = \mathrm{id}e^{r_0\mathrm{id}}$

   On a

$$\begin{aligned} y' &= (r_0\mathrm{id} + 1)e^{r_0\mathrm{id}} \\ y'' &= (r_0^2\mathrm{id} + 2r_0)e^{r_0\mathrm{id}} \end{aligned}$$

   D'où

$$ay'' + by' + cy = (\underbrace{ar_0^2\mathrm{id} + br_0\mathrm{id}}_{0} + \underbrace{c\mathrm{id} + 2ar_0 + b}_{0})e^{r_1\mathrm{id}}$$

3. Idem. Il suffit de montrer

$$\begin{cases} e^{\alpha\mathrm{id}}\cos\circ(\omega\mathrm{id}) & \in S_H \\ e^{\alpha\mathrm{id}}\sin\circ(\omega\mathrm{id}) & \in S_H \end{cases}$$

   D'après 1.

$$\begin{aligned} y_1 &:= e^{(\alpha+i\omega)\mathrm{id}} \in S_H \\ y_2 &:= e^{(\alpha-i\omega)\mathrm{id}} \in S_H \end{aligned}$$

   S_H est un sev donc

$$\begin{aligned} \frac{y_1+y_2}{2} &= e^{\alpha\mathrm{id}}(\cos\circ(\omega\mathrm{id})) \in S_H \\ \frac{y_1-y_2}{2} &= e^{\alpha\mathrm{id}}(\sin\circ(\omega\mathrm{id})) \in S_H \end{aligned}$$

   d'après Euler.

□

III.2 Cas d'un second membre de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$

Théorème 7 .

L'équation $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ a toujours une solution particulière de la forme $t^\mu Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ où :

μ est la multiplicité de γ comme racine de χ

Q est un polynôme de même degré que P.

Démonstration. Par calcul direct.

□

Exemples 7

On résout : $y''(t) - y(t) = t\mathrm{e}^t$; puis $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{ch}(t)$; puis CCINP 31 (sans variation des constantes).

$y'' - y = \mathrm{id}\exp$ Est-ce que $\mathrm{id}\exp = P\exp\circ(\gamma\mathrm{id})$? Oui, en posant $\begin{cases} P &= X \\ \gamma &= 1 \end{cases}$

Équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$
Solution $r_{1,2} = \pm 1$

$$S_H = \mathrm{Vect}\,(\exp, \exp\circ(-\mathrm{id}))$$

γ est racine simple du polynôme caractéristique, on cherche y_p sous la forme :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= t^{\overbrace{\mu}^{1}} \left(\underbrace{at+b}_{Q(t)} \right) \underbrace{e^t}_{e^{\gamma t}} \\ y_p'(t) &= (at^2 + bt)e^t \\ y_p''(t) &= (2a + 4at + 2b + at^2 + bt)e^t \\ &= (at^2 + (4a+b)t + (2a+2b))e^t \end{aligned}$$

On réinjecte dans

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p &= \mathrm{id}e^{\mathrm{id}} \\ \text{ie } &(\cancel{at^2 - at^2} + bt - 4at - bt - 2a - 2b)e^t = -te^t \\ \text{ie } &\begin{cases} 4a &= 1 \\ 2a + 2b &= 0 \\ \end{cases} \\ \text{ie } &\begin{cases} a &= \frac{1}{4} \\ b &= -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$S = \{A\exp + B\exp\circ(-\mathrm{id}) + \frac{\mathrm{id}^2 - \mathrm{id}}{4}\exp, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$$

$y'' - 2y' + y = \mathrm{ch}$ Solutions homogènes :

Équation caractéristiques

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ \text{ie } (r-1)^2 &= 0 \\ r_0 &= 1 \quad \text{racine double} \end{aligned}$$

$$S_H = \mathrm{Vect}\,(\exp, \mathrm{id}\exp)$$

On cherche y_{p_1} solution de

$$y'' - 2y' + y = e^{-\mathrm{id}} = P \cdot e^{\gamma\mathrm{id}} \qquad \text{avec } \begin{cases} P &= 1 \\ \gamma &= -1 \quad \text{pas racine du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= k \exp \circ (-\mathrm{id}) \\ y'_{p_1} &= -k \exp \circ (-\mathrm{id}) \\ y''_{p_1} &= k \exp \circ (-\mathrm{id}) \end{aligned}$$

$$(k - 2(-k) + k)e^{-t} = e^{-t} \text{ ie } k\frac{1}{4}y_{p_1}(t) \qquad = \frac{1}{4}e^{-t}$$

y_{p_2} solution de $y'' - 2y' + y = \exp$
sous la forme $y_{p_2} = \underbrace{K}_{Q(t)}\underbrace{t^2}_{t^\mu}\underbrace{e^t}_{e^{\gamma t}}$
Car 1 est racine double.

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= t \mapsto (Kt^2 + 2Kt)e^t \\ y''_{p_2} &= t \mapsto (Kt^2 + 4Kt + 2K)e^t \end{aligned}$$

En réinjectant :

$$2Ke^t = e^t \text{ ie } K = \frac{1}{2}$$

D'où

$$y_{p_2}(t) = \frac{t^2e^t}{2}$$

Par principe de superposition
Une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \mathrm{ch}$ est

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p_1} + y_{p_2} \\ &= t \mapsto \frac{t^2 + e^{-t}}{8} \end{aligned}$$

D'où

$$S = \{t \mapsto (A + Bt)e^t + \frac{2t^2e^t + e^{-t}}{8}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$$

IV Autres équations différentielles

IV.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de résoudre des ED avec conditions initiales de la forme $\begin{cases} y^{(n)}(t) = F(y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t), t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$

de façon approchée. Voir le cours d'informatique pour les détails.

Remarque 1
Même dans le cas $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ la méthode d'Euler peut être utile car

$$y'' + y = \cos^3$$

$$\begin{aligned}
\cos^3(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3it} + e^{-3it} + 3e^{it} + 3e^{-it}}{8} \\
&= \frac{\cos(3t)}{4} + 3\frac{\cos t}{4} \\
&= \Re\left(\frac{e^{3it}}{4} + \frac{3}{4}e^{it}\right)
\end{aligned}$$

On cherche z_{p_1} solution de

$z_{p_1}(t) = ke^{3it}$
$z''_{p_1}(t) = -9ke^{3it}$
$(-9+1)ke^{3it} = e^{3it}$
ie $k = -\frac{1}{8}$
$z_{p_1}(t) = -\frac{1}{8}e^{3it}$

On cherche z_{p_2} solution de

$$z'' + z = e^{it}$$

On a bien $P(t)e^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P(t) & = 1 \\ \gamma & = i \quad \text{pas racine du poly carac} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
z_{p_2}(t) &= Kte^{it} \\
z''_{p_2}(t) &= (-Kt + 2iK)e^{it} \\
2iKe^{it} &= e^{it} \\
\text{ie } K &= \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} \\
z_{p_2}(t) &= \frac{-i}{2}te^{it}
\end{aligned}$$

Par principe de superposition, z_p solution de $z'' + z = \frac{1}{4}e^{3it} + \frac{3}{4}e^{it}$ est donné par

$$z_p(t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{-e^{3it}}{8} + \frac{3}{4}\left(\frac{-i}{2}\right)te^{it}$$

Puis une solution particulière y_p de

$$z'' + z = \cos^3(t) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t$$

est donné par

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \Re(z_p(t)) \\ &= \frac{-\cos 3t}{32} + \frac{3t}{8}\sin(t) \end{aligned}$$

$$S = \{A\cos + B\sin - \frac{\cos\circ 3\mathrm{id}}{32} + \frac{3\mathrm{id}}{8}\sin, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\}$$

IV.2 Changement de fonction inconnue

On se ramène à une EDL qu'on sait résoudre mais qui est vérifiée par une fonction auxilliaire.

Exemple 8 Cherchons les solutions de $y'(t) + 2y(t) - (t+1)\sqrt{y(t)} = 0$ en posant $z(t) = \sqrt{y(t)} \Leftrightarrow y(t) = z^2(t)$. L'équation devient

$$\begin{aligned} (z^2)'(t) + 2z^2(t) + (t+1)\sqrt{z^2(t)} &= 0 \\ \text{ie } 2z(t)z'(t) + 2z^2(t) + (t+1)z(t) &= 0 \\ \text{ie } 2z(t)\left(z'(t) + z(t) - \frac{t+1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Sur tout intervalle sur lequel z ne s'annule pas

$$z'(t) + z(t) = \frac{t+1}{2}$$

$$\begin{aligned} S_H &= \mathbb{R}\exp\circ(-\mathrm{id}) \\ z_p(t) &= K(t)e^{-t} - K(t)e^{-t} \\ z_p'(t) + z_p(t) &= \frac{t+1}{2} \\ \text{ie } K(t)e^{-t} &= \frac{t+1}{2} \\ \text{ie } K(t) &= \frac{t+1}{2}e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t+1}{2}e^t \,\mathrm{d}\,t &= \left[\frac{t+1}{2}e^t\right] - \int \frac{e^t}{2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{t+1}{2}e^t - \frac{e^t}{2} + \mathbb{R} \\ &= \frac{te^t}{2} + \mathbb{R} \\ z_p(t) &= \frac{t}{2} \quad \text{convient.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathbb{R}e^{-t} + \frac{t}{2} \\ y(t) &= \left(\mathbb{R}e^{-t} + \frac{t}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

IV.3 Changement de variable

C'est le cas particulier où la fonction auxilliaire est de la forme $y \circ \varphi$, avec φ bijective, $\mathcal{D}^n$, de réciproque $\mathcal{D}^n$.

Exemple 9 Résolvons $t^2y''(t)+ty'(t)+y(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ « en effectuant le changement de variables $t = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ ».
Cela signifie qu'on fait le changement de fonction inconnue $z = y \circ \exp \Leftrightarrow y = z \circ \ln$.

$$\begin{aligned} z(x) &= y(t) & \text{avec } t = e^x \\ \text{ie } z(x) &= y(e^x) \end{aligned}$$

Dit autrement

$$\begin{aligned} y(t) &= z(x) & \text{avec } x = \ln t \\ \text{ie } y(t) &= z(\ln t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= z(\ln t) \\ y'(t) &= \frac{1}{t}z'(\ln t) \\ y''(t) &= -\frac{1}{t^2}z'(\ln t) + \frac{1}{t^2}z''(\ln t) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*, t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0 \\ \text{ie } \forall t \in \mathbb{R}_+^*, z''(\ln t) + z(\ln t) = 0 \\ \text{ie } \forall x \in (\ln^{\rightarrow}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}), z''(x) + z(x) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Meth 2}}$

$$\begin{aligned} z(x) &= y(e^x) & &= y(t) \\ z'(x) &= e^x y'(e^x) & &= ty'(t) \\ z''(x) &= e^{2x}y''(e^x) + e^x y'(e^x) & &= t^2y''(t) + ty'(t) \end{aligned}$$

Donc $z''(x) + z(x) = 0$
Soient $A, B \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z(x) &= A\cos x + B\sin x \\ y(t) &= A\cos(\ln t) + B\sin(\ln t) \end{aligned}$$

IV.4 Équations à variables séparées

Il s'agit des ED de la forme $y'(t) = f(y(t))g(t)$ (ou plus simplement : $y' = f(y)g(t)$).

Méthode :

1. On cherche uniquement les solutions y pour lesquelles $f \circ y$ **ne s'annule pas**.
2. L'équation équivaut alors à $\dfrac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$.
   En notant H une primitive de $\frac{1}{f}$ et G une primitive de g, l'équation équivaut donc à $\exists K \in \mathbb{K},\ H(y(t)) = G(t)+K$.

3. On cherche les intervalles I, J tels que $H_{|I}^{|J}$ soit bijective. Sur un tel intervalle on a $y = t \mapsto \left(H_{|I}^{|J}\right)^{-1}(G(t) + K)$.

Exemple 10 Cherchons les solutions ne s'annulant pas de $y' = t^2y^2$.
On cherche les solutions qui ne s'anulent pas

$$\begin{aligned} y \text{ solution} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y^2(t)} && = t^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} && = \frac{t^3}{3} + \mathbb{R} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{\mathrm{id}}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\frac{\mathrm{id}^3}{3} + \mathbb{R}} \\ &= \frac{3}{-3\mathbb{R} - t^3} \\ &= \frac{3}{\mathbb{R} - t^3} \end{aligned}$$

Les solutions ne s'annulant pas sont les

$$\begin{cases}]\sqrt[3]{c}, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{3}{c-3t^3} \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

et les

$$\begin{cases}]-\infty, \sqrt[3]{c}[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{3}{c-3t^3} \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$