Schémas numériques et applications

Vous trouverez à la fin de ce document quelques rappels. (de la théorie et des commandes python)

Application 1 : Modèle proies/ prédateurs de Lotka-Volterra

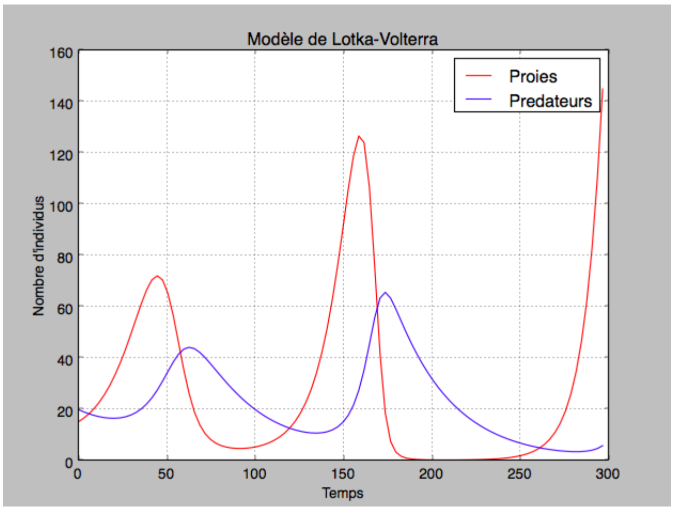
On considère un milieu dans lequel existe une population « u » de proies interagissant avec une unique population « v » de prédateurs.
Nous considérons les équations d'évolution avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)(a - bv(t)) \\ v'(t) = -v(t)(c - du(t)) \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \\ \text{a : taux de reproduction des proies, b= taux de mortalité des proies dû aux prédateurs} \\ \text{c : taux de mortalité des prédateurs, d= taux de reproduction des prédateurs indexé sur la quantité de proies} \end{cases}$$

nous fixons $a = 0,13$, $b = 0,005$, $u_0 = 15$, $c = 0,03$, $d = 0,001$, $v_0 = 20$.

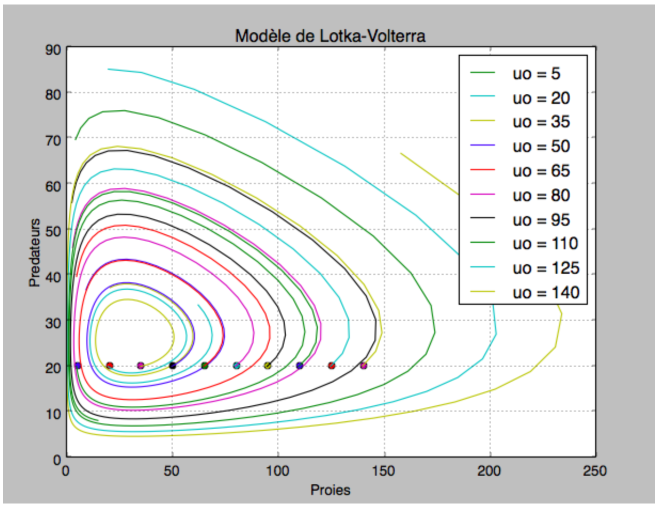
Question 1 :

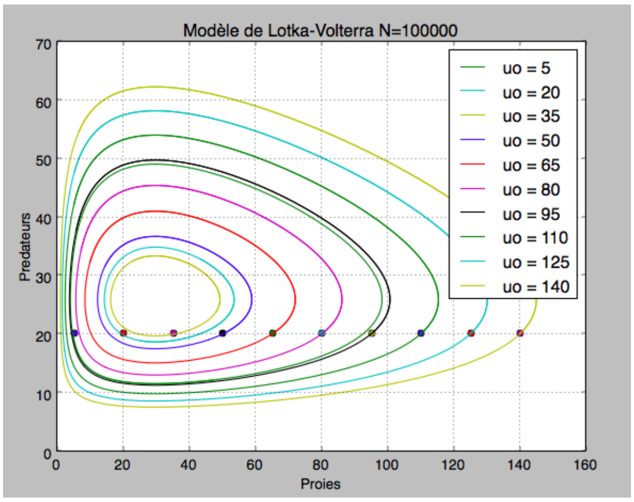
1. Proposer une formulation discrète du modèle avec prédation à l'aide de la méthode d'Euler explicite.
2. Proposer un script Python associé à la méthode précédente.
3. Tracer la simulation numérique donnant l'évolution des populations de proies et de prédateurs pour t inférieur à 300 unités de temps et un pas de temps de $h = \dfrac{300}{N}$ où $N = 200$.
4. Analyse des résultats : une baisse significative de nombre de proies implique-t-elle sa disparition ?



Question 2 :

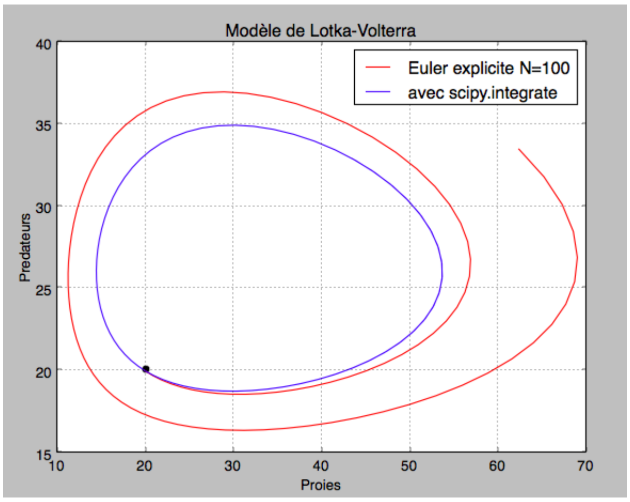
1. Représenter sur un graphe la population de proies en fonction de celle des prédateurs pour une période t inférieure à 150 et un pas de temps de $h = \dfrac{150}{N}$ où $N = 200$.
2. Reprendre la simulation précédente en faisant varier les conditions initiales : $u_0 \in \{5, 20, \cdots, 125, 140\}$, $v_0 = 20$. On pourra placer un point indiquant la condition initiale.
3. Que constatez-vous ? Quelle est l'influence de l'augmentation du nombre initial de proies ?
4. Reprendre les questions précédentes avec $N = 100, 1000, 10000, 100000$?
   Qu'elle hypothèse pourriez vous formuler ?

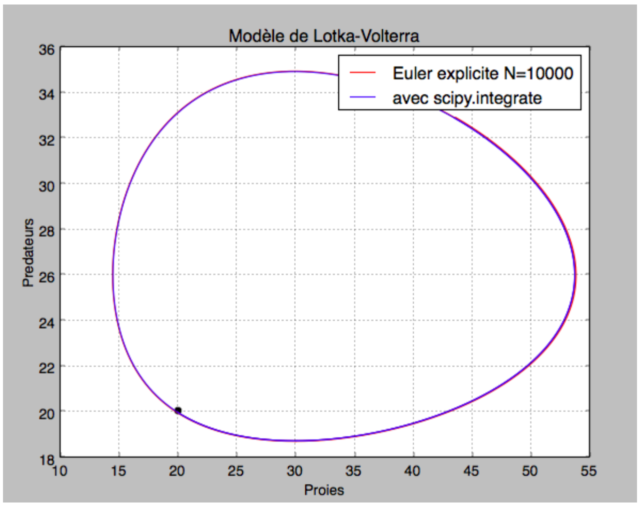




A l'aide du module scipy.integrate (aide en annexe) :

1. A l'aide de scipy.integrate représenter sur un graphe la population de proies en fonction de celle des prédateurs pour une période t inférieure à 150 et un pas de $h = \dfrac{150}{N}$.
2. Reprendre la simulation précédente en faisant varier les valeurs de $N \in \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$.
   On pourra placer un point indiquant la condition initiale.
3. Que constatez-vous ?





Application 2 : oscillateur harmonique

Objectif : On souhaite déterminer l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC.

Circuit LC idéal

Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = -w^2 u(t) \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = \lambda \\ \text{ u : tension aux bornes du condensateur} \\ \text{ w : pulsation du système non amorti} \end{cases}$$

On considère $u_0 = 12\ V$, $\lambda = 1\ V/s$, $w = 20\ rad/s$.
La solution formelle de cette équation différentielle est donnée par

$$u(t) = A\cos(wt + \phi)$$

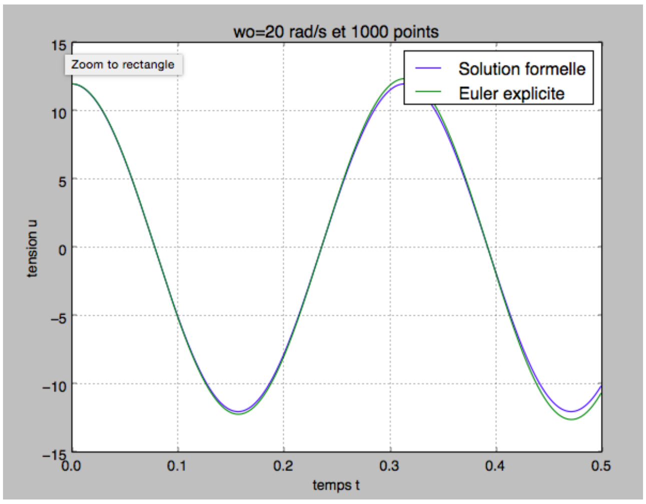
où $A = \sqrt{u_0^2 + (\frac{\lambda}{w})^2}$ et $\phi = -\arctan(\frac{\lambda}{wu_0})$. Nous posons dans la suite

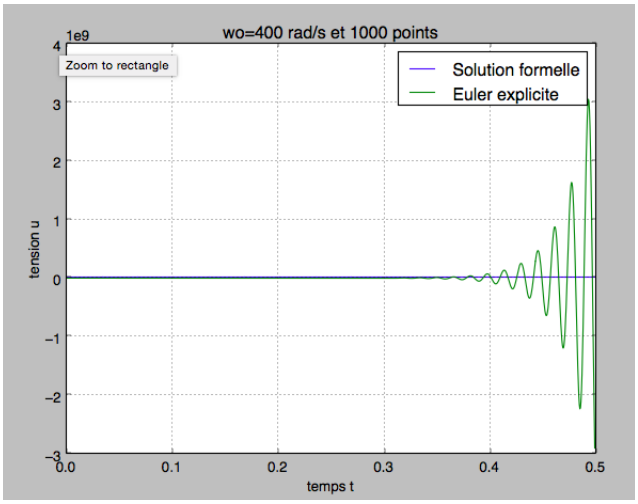
$$v(t) = \frac{1}{w}u'(t)$$

Nous remarquons que u et v sont homogènes.

Question 3 :

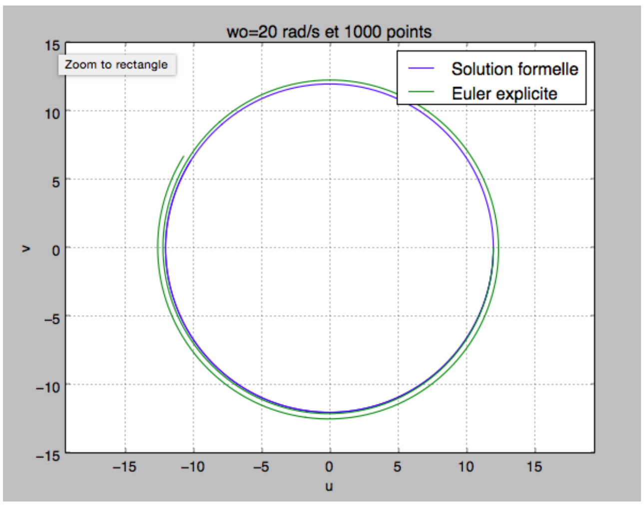
1. Reformuler le problème en une équation différentielle vectorielle du 1er ordre dont la solution est le couple (u, v).
2. Proposer ensuite une formulation discrète à l'aide d'un schéma d'Euler explicite.
   (nous prendrons 1000 points pour le calcul)
3. Tracer sur un même graphe la solution formelle et la simulation numérique pour t inférieur à $0,5s$.
4. Reprendre la simulation pour $w = 400\ rad/s$.

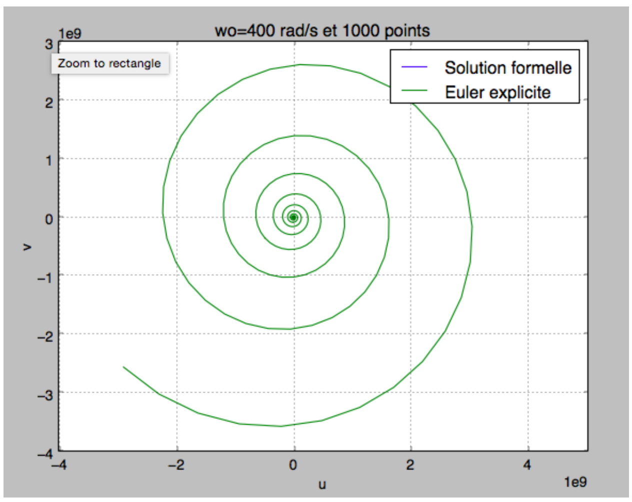




Question 4 :

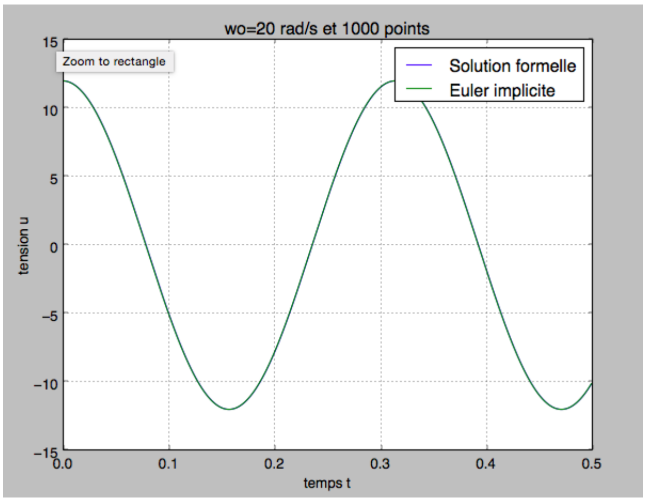
1. Montrer que l'énergie $E(u, v) = u^2 + v^2$ est contante (on donnera son expression)
2. Tracer dans le plan de phase (u,v) les courbes issues des solutions formelles et du schéma d'Euler explicite.
3. Interpréter les résultats obtenus avec les deux valeurs précédentes de w.

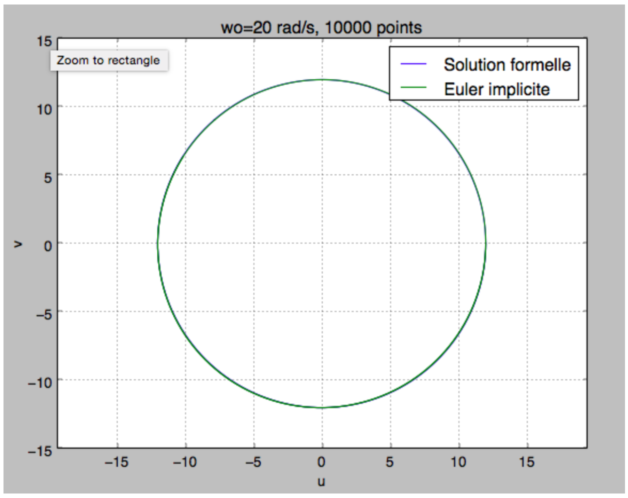


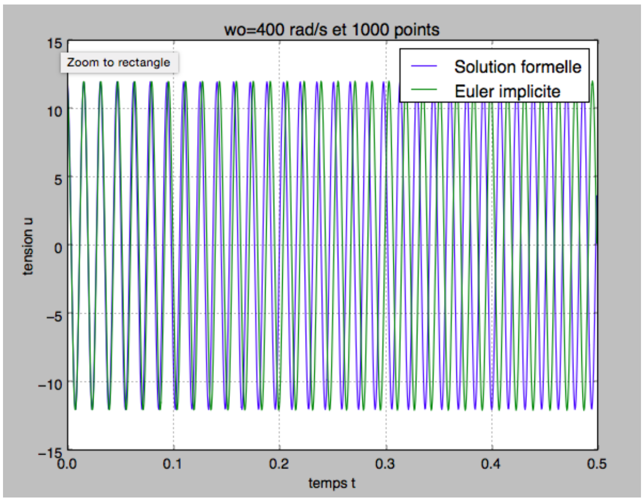


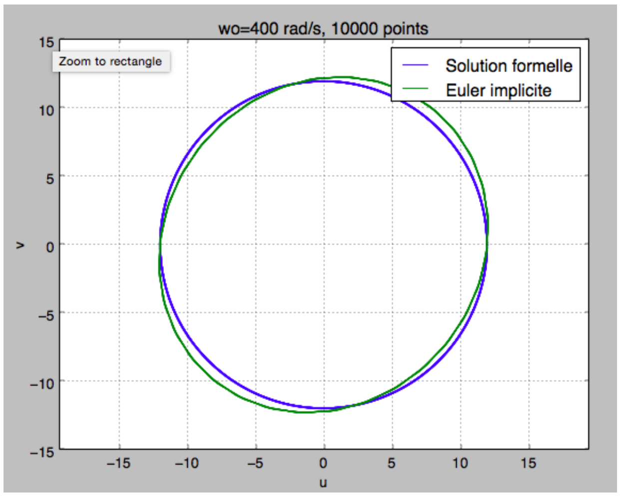
Question 5 :

1. Proposer une formulation numérique à l'aide d'un schéma d'Euler Implicite. Nous prendrons 100 points pour effectuer les calculs.
2. Tracer sur un même graphe la solution formelle et la simulation numérique pour t inférieur à $0,5s$ et $w = 20\ rad/s$ puis augmenter le nombre de calculs.









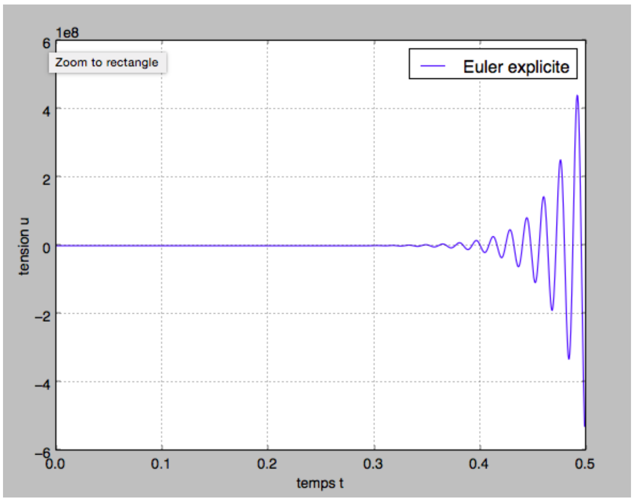
Les tests précédents nous soulignent l'importance de schéma plus évolués. (RK4, ...)

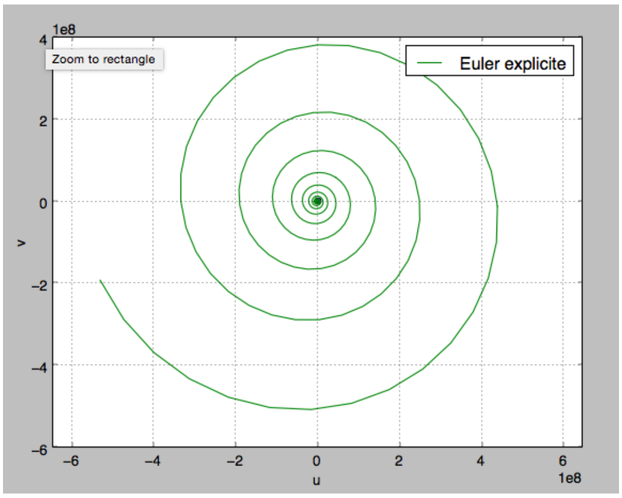
Circuit RLC

Nous considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) = -w^2 u(t) - 2\dfrac{c}{w}u'(t) \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = \lambda \\ \text{u : tension aux bornes du condensateur} \\ \text{w : pulsation du système non amorti} \\ \text{c : coefficient d'amortissement} \end{cases}$$

Reprendre les questions 3 et 4 sans la solution formelle.





Comment faire avec python ?

1. Pour tracer une belle courbe :

```
x=np.linspace(-5.,4.,100)
def f1(x):
    return(x-x**3/6.)# une première fonction
def f2(x):
    return(x-x**3/6.+x**5/120.) # une deuxième fonction
y1=[]
for a in x:
    y1.append(f1(a))  # la liste des valeurs de la fonction f1 sur la
        subdivision fixée par x
y2=[]
for a in x:
    y2.append(f2(a)) # la liste des valeurs de la fonction f2 sur la
        subdivision fixée par x
plt.plot(x,np.sin(x),linewidth=1,color='red',label="le sinus") # le tracé de
   sinus
plt.plot(x,y1,linewidth=1,color='blue',label="'Taylor' ordre 3")# le tracé de
    f1
plt.plot(x,y2,linewidth=1,color='black',label="'Taylor' ordre 5") # le tracé
   de f2
plt.legend()  # affichage des "labels"
plt.ylabel("Nombre d'individus") # axe des ordonnées
plt.xlabel("Temps") # axe des abscisses
plt.title(u"Modèle de Lotka-Volterra") # titre du graphique
plt.grid(True) # incorporer une grille
plt.show() # Afficher
```

2. Les schémas numériques avec Python sur l'équation $\theta'' = \sin(\theta)$

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def equation(X, t):
   return [ X[1], -np.sin(X[0]) ] # ici X[0]=theta et X[1]=theta-point

t = np.linspace(0, 20, 50)
init = [ np.pi / 4.0, -1 ] # vitesse angulaire initiale nulle

X = odeint(equation, init, t)

theta = X[:, 0]
thetapoint = X[:, 1]

plt.subplot(211)
plt.plot(t, theta)
plt.plot(t, thetapoint)
plt.subplot(212)
plt.plot(theta, thetapoint)
plt.show()
```

Rappels théoriques

- **Subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$**

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + k(\frac{b-a}{n}) = a + kh$$

En particulier $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{k+1} - x_k = h$.
- **Le problème :** obtenir une solution approchée du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y'(t) & = & F(Y(t), t) \\ Y(0) & = & c \end{cases}$$

sous des conditions raisonnables sur $F : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

  - Schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k) \\ y_0 = c \end{cases}$$

  - Schéma d'Euler implicite :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y_{k+1} = y_k + hF(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ y_0 = c \end{cases}$$

- **Représentation :** on représente le nuage de points $(x_k, y_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$.