
Equations de la chaleur

Les mots clefs : équation de la chaleur, schéma d'Euler, différence finie, schéma implicite, explicite.

Le cas de la dimension spatiale égale à 1

Nous considérons une tige métallique et nous l'assimilerons au segment $[0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérerons la discrétisation régulière à $n + 1$ points de cette tige donnée par les points :

$$\left\{ \frac{k}{n} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\} \text{ nous noterons } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = \frac{k}{n} = kh \text{ avec } h = \frac{1}{n}$$

Dans la suite, nous fixerons $n = 50$ pour effectuer les premiers tests ,

La chaleur à la date $t = 0$ est connue aux points de la discrétisation précédente, puis nous laissons la tige se refroidir.

Nous souhaitons modéliser l'évolution de la température aux différents points de la discrétisation de la tige.

Pour les mêmes raisons que la discrétisation spatiale, nous effectuons une discrétisation temporelle : nous fixons ainsi un pas de temps dt noté δ . Nous évaluons la température aux temps $0, \delta, 2\delta, \dots$.

Dans la suite, nous fixerons $\delta = 10^{-3} = 0.001$ pour effectuer les premiers tests.

Nous noterons u la température en fonction des variables x de position et t de temps. Nous supposons que les échanges de chaleur n'ont lieu qu'au sein de la tige et nous imposons une température constante aux deux extrémités de celle-ci (il s'agit des conditions de Dirichlet).

L'équation de la chaleur permettant de modéliser l'évolution de celle-ci est donnée par :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (= \Delta u)}$$

Notation : nous noterons dans la suite $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k^{(i)} = u(x_k, i\delta)$.

Les discrétisations choisies nous imposent un schéma numérique :

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, l'approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}$ à la position x_k et la date $i\delta$ est donnée par

$$\frac{u_k^{(i+1)} - u_k^{(i)}}{\delta}$$

2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, nous considérons l'approximation de Laplacien à la position x_k et la date $i\delta$ est

$$\frac{1}{h^2} \left(u_{k+1}^{(i)} - 2u_k^{(i)} + u_{k-1}^{(i)} \right)$$

(revoir la dérivation discrète!)

Hypothèse :

1. **Condition au temps $t = 0$:**

Nous supposons que $\forall x \in [0, 1], u(x, 0) = x(1 - x)$. Ce qui implique que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$u_k^{(0)} = kh(1 - kh)$$

2. **Conditions de Dirichlet :**

La température est nulle et est constante aux extrémités : $\forall i \in \mathbb{N}, u_0^{(i)} = u_n^{(i)} = 0$.

L'évolution discrète peut prendre deux formes : **explicite** ou **implicite** .

Première partie : le schéma d'Euler explicite

On considère le schéma donnée par : $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_0^{(i+1)} &= 0 \\ u_n^{(i+1)} &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \frac{u_k^{(i+1)} - u_k^{(i)}}{\delta} &= \frac{1}{h^2} \left(u_{k+1}^{(i)} - 2u_k^{(i)} + u_{k-1}^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{aligned} u_0^{(i+1)} &= 0 \\ u_n^{(i+1)} &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad u_k^{(i+1)} &= \frac{\delta}{h^2} u_{k+1}^{(i)} + \left(1 - 2\frac{\delta}{h^2}\right) u_k^{(i)} + \frac{\delta}{h^2} u_{k-1}^{(i)} \end{aligned}}$$

Nous noterons dans la suite $\alpha = \frac{\delta}{h^2}$.

Nous considérerons que $\forall i \in \mathbb{N}$, $u^{(i)}$ est le vecteur (tableau / liste) à $n+1$ composantes données

$$u^{(i)} = \left(u_k^{(i)} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$$

Représentation matricielle :

Nous noterons pour tout $i \in \mathbb{N}$, $U^{(i)}$ la matrice colonne de taille $n-1$ du vecteur $u^{(i)}$ dans la base canonique. Nous obtenons ainsi que $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$U^{(i+1)} = (I - \alpha B)U^{(i)}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Définir la liste $U^{(0)}$ et la liste contenant les valeur x_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
La suite peut se traiter à l'aide des **matrices** et du module **numpy** mais ce n'est pas nécessairement. Nous l'éviterons donc dans la correction.
- Calculer les tableaux $U^{(i)}$ pour $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
- Afficher sur un même graphique les graphiques des fonctions $x \mapsto u(x, i\delta)$ pour $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
- Constater des phénomènes d'instabilité pour $\delta = 10^{-3}$ et $h = 1/50$ en représentant les résultats pour $i \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$.
- Tester à nouveau avec $\delta = 10^{-4}$ et $h = 1/50$ Effectuer 100 itérations et représenter sur un même graphe les courbes de $x \mapsto u(x, i\delta)$ pour $i \in \llbracket 0, 100 \rrbracket$.

Pour tracer en faisant évoluer les couleurs nous pourrons nous inspirer du code :

(et consulter la page http://matplotlib.org/examples/color/colormaps_reference.html pour comprendre d'où vient le "hot" ... pas mal pour l'équation de la chaleur!)

```
plt.plot(x, u, label = ..... , color = plt.get_cmap('hot')(float(k)*delta))
```

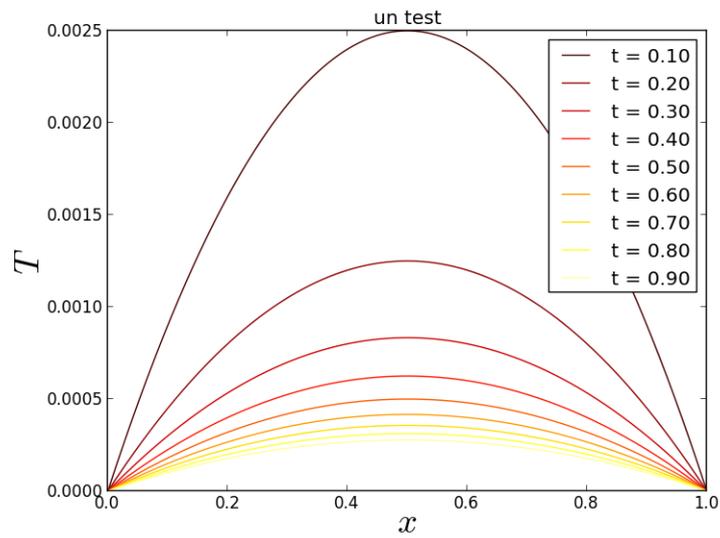
Tester par exemple le code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
x = np.linspace(0.0,1.0,N)
delta=0.001
def f(x):
    return (x*(1-x))
```

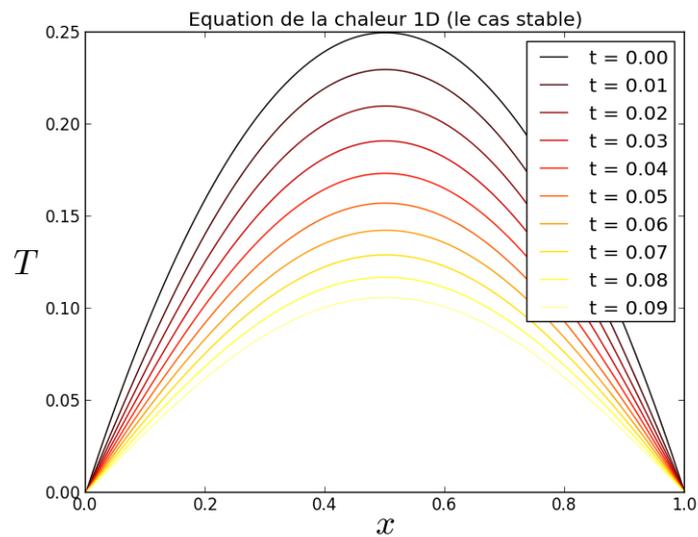
```

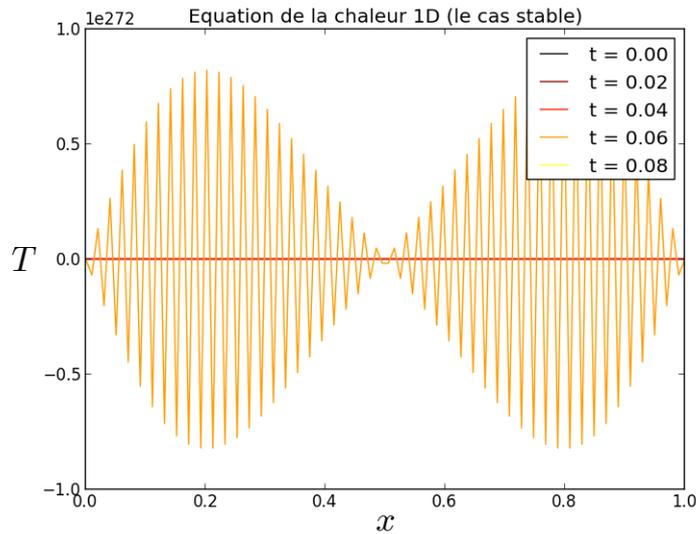
for k in range(1,N):
    T = f(x)/k
#Toutes les 100 pas
    if (k%100 == 0):
        plotlabel = "t = %1.2f" %(k * delta)
        plt.plot(x,T, label=plotlabel ,color = plt.get_cmap('hot')(float(k)/N))
plt.xlabel(u'$x$', fontsize=26)
plt.ylabel(u'$T$', fontsize=26, rotation=90)
plt.title(u'un test ')
plt.legend()
plt.show()

```



L'étude précédente devrait permettre d'obtenir ce type de graphe :





Pourquoi est-ce instable ?

Nous étudions le système récurrent suivant $\forall i \in \mathbb{N}, U^{(i+1)} = (I - \alpha B)U^{(i)}$. Nous noterons $A = (I - \alpha B)$
 En notant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

où $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|Y\|$ est la norme ∞ de Y .

Nous obtenons en particulier que $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative. i.e. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Comportement face aux erreurs :

Regardons un cas particulier, si une erreur $\varepsilon > 0$ est commise à l'instant 0 sur toutes les composantes. En notant J la matrice colonne composée que de 1 et $A = I - \alpha B$, nous obtenons $U^{(1)} = A(U^{(0)} + \varepsilon J)$. Ce qui mène à $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$U^{(i+1)} = AU^{(i)} + \varepsilon A^i J$$

La question devient : quelle est l'évolution de $(A^i J)_{i \in \mathbb{N}}$? Il s'agit de retenir l'idée suivante : Si $\|A\| < 1$ alors $A^i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$

Le système est à améliorer lorsque $\|A\| > 1$ mais des phénomènes d'instabilité peuvent se produire lorsque $\|A\|$ est proche de 1 et pour un nombre d'itérations faibles.

Vocabulaire : Nous dirons que le système est stable lorsque $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné.

Quelle est la condition de stabilité lorsque $A = I - \alpha B$? La condition est dans ce cas $\alpha \leq \frac{1}{2}$ i.e. $2\delta \leq h^2$

Nous remarquons en effet que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ alors les éléments de $\|I - \alpha B\|$ sont inférieurs à 1. (la réciproque est plus délicate)

Dans le cas général d'une équation de la chaleur avec un coefficient de diffusion K : $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

La condition de stabilité est dans ce cas $\frac{\delta}{h^2} \leq \frac{1}{K}$ i.e. $K\delta \leq h^2$

Comment améliorer la stabilité du schéma ?

Deuxième partie : le schéma d'Euler implicite

On considère le schéma donnée par : $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_0^{(i+1)} &= 0 \\ u_n^{(i+1)} &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \frac{u_k^{(i+1)} - u_k^{(i)}}{\delta} &= \frac{1}{h^2} \left(u_{k+1}^{(i+1)} - 2u_k^{(i+1)} + u_{k-1}^{(i+1)} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} u_0^{(i+1)} = 0 \\ u_n^{(i+1)} = 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad u_k^{(i)} = -\frac{\delta}{h^2} u_{k+1}^{(i+1)} + \left(1 - 2\frac{\delta}{h^2}\right) u_k^{(i+1)} - \frac{\delta}{h^2} u_{k-1}^{(i+1)} \end{array}$$

En conservant les notations de la partie précédente, nous obtenons que : $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$U^{(i)} = (I + \alpha B)U^{(i+1)}$$

Remarque : nous remarquons que $I + \alpha B$ est à diagonale dominante donc inversible.

Nous notons $A(\alpha) = (I + \alpha B)^{-1}$. Nous obtenons ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$U^{(i+1)} = A(\alpha)U^{(i)}$$

Nous pouvons montrer que $\|A(\alpha)\| \leq 1$ ce qui implique en particulier que le schéma est stable pour toute valeur de α .

Nous proposons dans la suite deux méthodes pour parvenir aux résultats :

1. A l'aide d'un module python :

- (a) Tester l'outil **numpy.linalg.solve(A, B)** du module **numpy** qui donne la solution X de l'équation linéaire matricielle $AX = B$.

Tester par exemple le code :

```
import numpy as np
a = np.array([[3, 1], [1, 2]])
b = np.array([9, 8])
x = np.linalg.solve(a, b)
print(x)
```

- (b) Afficher sur un même graphique les graphiques des fonctions $x \mapsto u(x, i\delta)$ sous les mêmes conditions que dans le cas explicite et identifier la stabilité du schéma.

2. Sans module (ou presque)

- (a) Le pivot de Gauss :

- i. Ecrire une fonction **dilat(t, i, A, Y)** où t est un flottant non nul, i un indice de ligne, A une matrice et Y une matrice colonne qui effectue sur A et Y l'opération $L_i \leftarrow tL_i$.
- ii. Ecrire une fonction **perm(i, j, A, Y)** où i, j sont des indices distincts, A une matrice et Y une matrice colonne qui effectue sur A et Y l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
(Attention aux copies!!!! utiliser si nécessaire **np.copy**)
- iii. Ecrire une fonction **transv(t, i, j, A, Y)** où t est un flottant, i, j sont des indices distincts, A une matrice et Y une matrice colonne qui effectue sur A et Y l'opération $L_i \leftrightarrow L_i + tL_j$.
- iv. Ecrire une fonction **indice(j, A)** où j est un indice de colonne, A une matrice qui détermine le plus petit entier i_0 tel que $|a_{i_0, j}| = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_{i, j}|$.
- v. Ecrire une fonction **resolv(A, Y)** où A une matrice et Y une matrice colonne qui donne la solution X de l'équation linéaire matricielle $AX = Y$.

- (b) En utilisant votre fonction **resolv**, affichez sur un même graphique les graphiques des fonctions $x \mapsto u(x, i\delta)$ sous les mêmes conditions que dans le cas explicite et identifier la stabilité du schéma.

Le cas de la dimension spatiale égale à 2 (pour la culture)

Nous considérons dans cette partie une plaque métallique. Nous assimilons cette plaque au pavé $[0, 1]^2$.

Nous noterons u la température en fonction des variables x et y de position et t de temps. L'équation de la chaleur permettant de modéliser l'évolution de celle-ci est donnée par :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

A l'aide d'un schéma d'Euler explicite et en notant $u_{k,l}^{(i)} = u(kh, lh, i\delta)$ (nous choisissons la même discrétisation en x et en y) nous obtenons le système d'évolution suivant $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$u_{k,0}^{(i)} = u_{0,l}^{(i)} = u_{k,n}^{(i)} = u_{n,l}^{(i)} = 0$$

ainsi que $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k, l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$u_{k,l}^{(i+1)} = u_{k,l}^{(i)} + \delta \left[\frac{u_{k-1,l}^{(i)} - 2u_{k,l}^{(i)} + u_{k+1,l}^{(i)}}{h^2} + \frac{u_{k,l-1}^{(i)} - 2u_{k,l}^{(i)} + u_{k,l+1}^{(i)}}{h^2} \right]$$

Nous pourrions poursuivre l'étude en s'inspirant du cas monodimensionnel explicite..... mais nous allons en rester là !